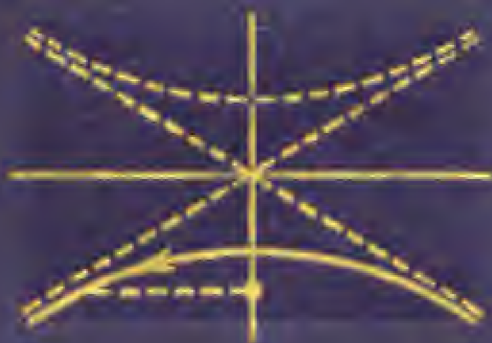


М. Б. Балк

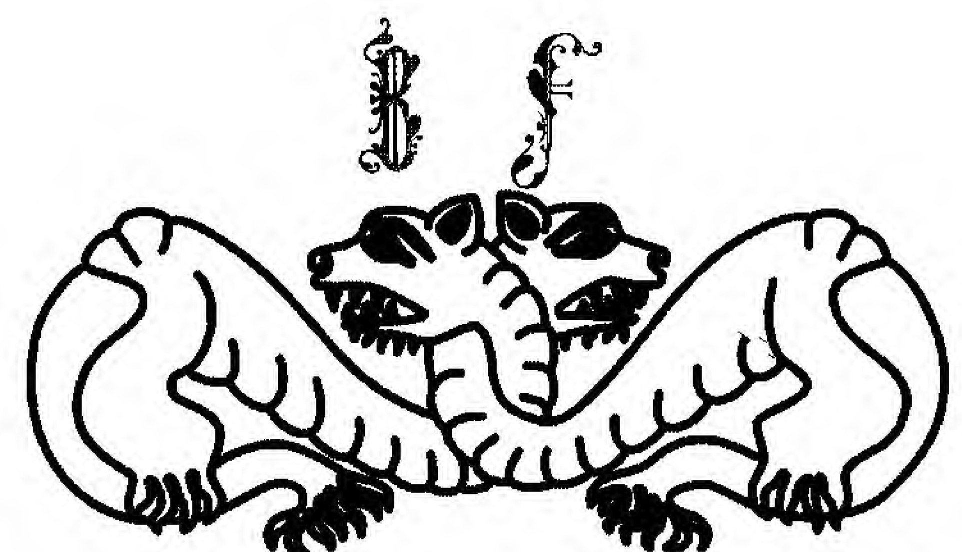
ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

М. Б. БАЛК

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

6Т5.2
Б20
УДК 629.19 521.1

2-6-5
132-65

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 11
Глава I. **Элементарные сведения из теории ньютоновского потенциала** 19
§ 1. Векторная запись закона тяготения. Ньютоновский потенциал поля, созданного одной материальной точкой 19
§ 2. Потенциал шара со сферическим распределением плотности 24
§ 3. Потенциал тела несферической структуры 32
Глава II. **Задача двух тел** 40
§ 1. Постановка задачи. 40
§ 2. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера . . . 45
§ 3. Интеграл энергии 52
§ 4. Интеграл Лапласа 54
§ 5. Уравнение орбиты спутника 55
§ 6. Скорость спутника и ее компоненты 61
§ 7. Зависимость характера орбиты спутника от величины начальной скорости 64
§ 8. Эллипс и гипербола с единой точки зрения . . . 70
§ 9. Связь константы энергии спутника с величиной главной полуоси его орбиты 73
§ 10. Третий закон Кеплера 80
§ 11. Солнечный парус 87
§ 12. Применение комплексных переменных в задаче двух тел 90
Глава III. **Продолжительность перелета спутника между двумя точками орбиты** 102
§ 1. Полет от перицентра 102
§ 2. Вывод уравнения Кеплера 106
§ 3. Решение уравнения Кеплера 111
§ 4. Приближенные формулы для орбит, близких к круговым 118
§ 5. Формула Ламберта 122
Глава IV. **Траектория спутника в трехмерном пространстве** 131
§ 1. Элементы орбиты 131
§ 2. Определение положения спутника по известным элементам его орбиты 136

§ 3. Нахождение элементов орбиты по нескольким положениям спутника 146
§ 4. Определение элементов орбиты спутника по его положению и скорости в один момент времени . . 149
§ 5. Уточнение элементов орбиты спутника по многим наблюдениям 151
§ 6. Прогнозирование трассы спутника Земли 156

Глава V. **Задача *n* тел** 166
§ 1. Задача трех тел в инерциальной системе отсчета 166
§ 2. Интегралы задачи трех тел 171
§ 3. Основные формулы задачи *n* гравитирующих точек в инерциальной системе отсчета 175
§ 4. Движение *n* материальных точек относительно их барицентра 178
§ 5. Движение системы *n* материальных точек относительно одной из них 187
§ 6. Интеграл площадей и интеграл энергии в относительном движении 192
§ 7. Заключительные замечания 196

Глава VI. **Применение понятия о сфере действия к приближенному расчету траектории малого тела** 201
§ 1. Сфера притяжения и сфера действия 201
§ 2. Приближенная методика 209
§ 3. Задача о третьей космической скорости 213
§ 4. Полет к Венере 217

Глава VII. **Ограниченная задача трех тел** 228
§ 1. Постановка задачи 228
§ 2. Дифференциальные уравнения ограниченной круговой задачи трех тел 229
§ 3. Применение комплексных переменных к плоской ограниченной задаче трех тел 237
§ 4. Точки либрации 244
§ 5. Линии Хилла 251
§ 6. Дополнения и обобщения 259

Глава VIII. **Отклонение движения спутника от кеплеровой траектории** 264
§ 1. Возмущения в элементах орбиты 264
§ 2. Влияние сплюснутости планеты на траекторию спутника 278
§ 3. Влияние сопротивления атмосферы Земли на движение спутника 284

Ответы, указания и решения 300

Приложение. Некоторые астрономические постоянные . . . 329

Литература 331

Предметный указатель 336

ПРЕДИСЛОВИЕ

Величественные достижения последних лет в области исследования космоса: вывод на орбиту Советским Союзом первых искусственных спутников Земли, многочисленные запуски советских и американских спутников различного назначения, посылка космических аппаратов к Луне, Венере, Марсу, полеты космонавтов — все это привлекло внимание широких слоев читателей к проблемам космонавтики, в том числе к ее траекторным задачам.

Динамика космического полета имеет своим предметом изучение движения искусственных небесных тел, учет влияния различных факторов на характер этого движения. Эта ветвь механики известна также под иными названиями: «прикладная небесная механика», «космодинамика», «небесная баллистика», «астродинамика».

Теория полета искусственных небесных тел существенным образом использует методы и результаты классической небесной механики, занимающейся изучением движения естественных небесных тел. Сейчас небесная механика предстает в новом свете — как введение в динамику космического полета.

В данной книге основное внимание уделено именно тем траекторным задачам космонавтики, которые наиболее близки к классической небесной механике. Другие вопросы космодинамики (некоторые из них упомянуты во введении) автор надеется изложить в книге, продолжающей данную.

Книга адресована тем, кто желает получить представление о небесно-механическом аппарате космонавтики, о простейших задачах космодинамики и методах их решения. Это могут быть студенты технических вузов и физико-математических факультетов, инженеры, преподаватели естественно-математического профиля. У читателя

предполагается знакомство с основами высшей математики в объеме программы втуза.

В течение последних лет у нас и за рубежом было выполнено большое число интересных и глубоких исследований, посвященных динамике космического полета. Данная книга может послужить введением к этим работам *). После ее чтения читателю будет легче приступить к изучению специальных статей и монографий, в частности монографий, выпускаемых Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» в серии «Механика космического полета».

Неотъемлемой частью этой книги являются включенные в нее задачи. Они разнообразны по содержанию и степени трудности. Многие из них снабжены ответами или решениями, помещенными в конце книги. Одни задачи представляют собой иллюстративные примеры к соответствующему теоретическому материалу, другие же представляют самостоятельный интерес. Поэтому к задачам необходимо отнестись так же внимательно, как и к остальному тексту. Крайне желательно, чтобы читатель самостоятельно представил себе ход решения каждой из задач и по крайней мере некоторые из них решил полностью. Это не займет много времени, если привлечь хотя бы простейшие счетные приборы (арифмометр или логарифмическую линейку), а также таблицы, указанные в списке литературы. Некоторые астрономические константы, которые могут потребоваться читателю при решении задач, собраны в приложении.

Для математических справок, потребность в которых может возникнуть при чтении книги, читателю достаточно обратиться к пособиям [0.16—0.20] списка литературы.

Введение к книге содержит краткий обзор некоторых основных проблем, интересующих космодинамику.

Глава I дает представление о ньютоновском потенциале тел сферической и несферической структуры.

Главы II—IV посвящены движению спутника центрального тела, принимаемого за материальную точку или тело

---

*) Некоторые из этих работ перечислены в конце книги в списке литературы (который, разумеется, ни в коей мере не претендует на полноту).

сферической структуры (невозмущенное движение). Использование аппарата векторного исчисления позволило сделать изложение теории невозмущенного движения более компактным. Привлечение комплексных чисел дало возможность одновременно, единым приемом рассмотреть эллиптическое и гиперболическое движения.

Глава II посвящена в основном изложению обычных, традиционных вопросов задачи двух тел. Формулы для скорости космического аппарата (§ 9) используются для приближенной оценки времени перелета по дуге гиперболической орбиты вдали от притягивающего центра. В § 12 выясняется возможность применения аппарата комплексных переменных для вывода всех важнейших формул задачи двух тел. В § 11 рассмотрена также задача о движении космолета с солнечным парусом (дифференциальные уравнения этой задачи сходны с дифференциальными уравнениями задачи двух тел).

В главе III рассказывается о способах нахождения времени перелета космического аппарата по заданной дуге известной орбиты. Приведены формулы для времени перелета по дуге параболы или дуге эллипса малого эксцентриситета. Довольно подробно рассмотрено уравнение Кеплера, изложен метод его решения (для эллиптического и гиперболического движений).

В главе IV рассматривается кеплерово движение относительно заданной в пространстве системы отсчета. Рассмотрены задачи о нахождении положения спутника по заданным элементам его орбиты и о нахождении элементов орбиты по нескольким известным положениям спутника. Привлечение простейших сведений о матрицах и о векторах позволяет изложить эти вопросы весьма компактно. В § 6 главы IV рассказано о возможности прогнозирования трассы близкого спутника на поверхности Земли. Здесь мы впервые отступаем от кеплеровых движений, когда учитываем вращение плоскости орбиты, вызванное сжатием Земли.

Для изучения движения космических аппаратов большое значение имеет проблема n тел. В главе V выведены (в векторной форме) дифференциальные уравнения проблемы n тел в различных системах отсчета. Интеграл площадей и интеграл энергии устанавливаются для движения

системы n взаимно тяготеющих точек относительно произвольной, заранее выбранной точки пространства. В обзорном плане рассказано о лагранжевых движениях, о рядах Зундмана и Ли-Гребнера, о финальных движениях в проблеме трех тел.

В главе VI формулы предыдущей главы используются для введения понятия о сфере действия. Излагается сущность кусочно конического метода приближенного расчета космических траекторий; в качестве примера рассмотрена задача о полете к Венере.

Глава VII посвящена актуальной для космонавтики ограниченной задаче трех тел (уравнения движения, интеграл Якоби, точки либрации, линии Хилла). Рассказано о некоторых работах по задаче трех тел, проведенных в последнее время.

Глава VIII содержит начальные сведения о теории возмущений. Уравнения для возмущений в элементах орбиты выведены методом, предложенным А. И. Лурье. §§ 2 и 3 должны дать некоторое представление о влиянии геофизических факторов на движение искусственных спутников.

Каждый параграф имеет свою нумерацию формул. При ссылке на формулы из другого параграфа указываются номера главы, параграфа, формулы; например, запись (2.8.1) означает: глава II, § 8, формула (1).

Приношу свою глубокую признательность Д. Е. Охоцимскому, В. А. Егорову, В. И. Левантовскому и П. Т. Резниковскому, чьи ценные замечания и советы позволили значительно улучшить книгу. Благодарю также Р. Х. Кристалинского и В. А. Петрова за оказанную мне помощь при оформлении рукописи и проверке некоторых вычислений.

Буду признателен всем читателям, которые сообщат мне свои критические замечания по данной книге.

М. Балк

ВВЕДЕНИЕ

1. При изучении движения небесных тел — как естественных, так и искусственных — необходимо в первую очередь принимать во внимание силы взаимного притяжения тел в пространстве. Свою основную задачу классическая небесная механика видела в изучении движения тел именно под воздействием их взаимного притяжения. Отправным пунктом в построении небесной механики служит закон всемирного тяготения, открытый 300 лет тому назад, в 1665—1666 годах, великим английским физиком и математиком Исааком Ньютоном (1643—1727). Этот закон характеризует взаимодействие материальных точек (то есть геометрических точек, снабженных массами). Он гласит:

Всякая материальная точка притягивает каждую другую материальную точку с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между этими точками.

Материальные точки, притягивающиеся друг к другу по закону всемирного тяготения, иногда называют гравитирующими (от слова гравитация, то есть тяготение).

Если m_1 и m_2 — массы двух материальных точек, r — расстояние между ними, то величина силы F, с которой каждая из этих точек притягивает другую, определяется по формуле

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f — коэффициент пропорциональности. Величина f называется *универсальной постоянной тяготения*. В интернациональной системе единиц (SI)

$$f = 6{,}670\,(1 \pm 0{,}0007)\cdot 10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot сек^2}$$

В небесной механике и космонавтике изучение движения *тел* часто заменяют изучением движения тех *материальных точек*, которые образовались бы, если бы вся масса каждого из тел была сосредоточена в его центре тяжести. Это во многих случаях позволяет получить удовлетворительное представление о движении самих тел.

2. Отметим некоторые особенности тяготения.

Действие тяготения к данному телу может быть обнаружено на громадных расстояниях от этого тела. Так, например, притяжение к Солнцу проявляется на расстояниях, в 20 000 раз больших, чем расстояние от Земли до Солнца (то есть на расстоянии в 3000 млрд. *км*): на таком расстоянии солнечное притяжение еще определяет движение некоторых комет.

Промежуточная среда между двумя телами никак не влияет на величину силы тяготения: эта сила останется одной и той же независимо от того, разделены ли тела разреженным межзвездным пространством или между ними находится какая-либо плотная среда; тяготение безразлично к преградам и препятствиям. Никакие лабораторные эксперименты и астрономические наблюдения не позволили обнаружить какого-либо влияния преград на распространение тяготения.

Наконец, тяготение распространяется мгновенно. Французский математик и астроном Ж. П. Лаплас (1749—1827) попытался ответить на вопрос: если допустить, что тяготение передается с определенной скоростью, то какова должна быть эта скорость распространения тяготения, если она не может быть обнаружена при наблюдении небесных тел с помощью современных (для Лапласа) приборов? Он пришел к выводу, что если тяготение и передается с некоторой скоростью, то эта скорость во всяком случае более чем в миллион раз превышает скорость света.

Природа тяготения получила удовлетворительное объяснение лишь в XX столетии в так называемой общей теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1914 году.

3. При изучении движения небесных тел обычно делаются некоторые упрощающие допущения. Отметим наиболее важные из них:

1°. При рассмотрении движения некоторого тела (например, планеты, кометы или космического корабля) учи-

тывают влияние лишь одного, двух или нескольких тел. При этом пренебрегают воздействием бесконечного множества других тел, либо обладающих малыми массами, либо расположенных на больших расстояниях от изучаемого тела.

2^0. Тела считаются абсолютно твердыми.

3^0. В ряде случаев тела рассматриваются как материальные точки.

Одной из важнейших по своим приложениям задач небесной механики является задача n материальных точек (ее чаще называют «задачей n тел»), которая формулируется следующим образом: *изучить движение n взаимно гравитирующих материальных точек, если известны массы этих точек, их положения и скорости в какой-то один* («*начальный*») *момент времени*. В задаче n тел пренебрегают воздействием других тел на указанные n материальных точек, а также всеми другими силами взаимодействия между ними (кроме сил тяготения).

Важнейший для астрономии конкретный случай задачи n тел — это задача о движении девяти больших планет вокруг Солнца ($n = 10$).

Задача n тел полностью решена лишь при $n = 2$. Даже при $n = 3$ она не имеет практически удобного общего решения. Однако в небесной механике используются численные методы, которые позволяют для каждого конкретного случая задачи n тел и для не слишком большого промежутка времени найти удовлетворительное для практики приближенное частное решение этой задачи.

Особенно интересен для космонавтики тот случай задачи n тел, когда масса одного тела ничтожно мала по сравнению с массами других тел. Так, например, обстоит дело в случае движения космической ракеты к Луне (система четырех тел: Земля, Луна, Солнце и тело малой массы — ракета) или при подлете автоматической межпланетной станции к Венере (система трех тел: Солнце, Венера и малое тело — межпланетная станция). В каждом из этих случаев можно практически считать, что тело малой массы вовсе не влияет на движение остальных, больших тел; говоря точнее, допустимо пренебречь теми ускорениями, которые сообщаются малым телом каждому из больших тел. Последнее допущение равносительно тому, что мы пренебрегаем

силами, с которыми малое тело притягивает большие тела. Надо при этом отдавать себе отчет в том, что мы пренебрегаем этими силами не потому, что они малы,— сила, с которой малое тело притягивает большое тело, в точности равна (по величине) силе, с которой большое тело притягивает малое; первой из этих сил мы пренебрегаем, а вторую учитываем; мы пренебрегаем здесь названными выше силами потому, что малы вызываемые ими ускорения.

Таким образом, мы приходим к целесообразности рассмотрения так называемой *ограниченной задачи* n *тел*. Задача эта формулируется так: *известно движение* $n-1$ *взаимно гравитирующих материальных точек* $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}$ *(с массами* $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$*) относительно некоторой инерциальной системы отсчета; эти* $n-1$ *материальных точек притягивают материальную точку* A_n*; материальная точка* A_n *ни одну из точек* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *не притягивает. Требуется изучить движение точки* A_n. Материальную точку A_n, о которой говорится в этой задаче, называют *пассивно гравитирующей*; остальные материальные точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ называют *активно гравитирующими*.

Тщательное исследование ограниченной задачи n тел и ее частных случаев, качественный анализ ее решений, получение удобных вычислительных формул чрезвычайно важны для практики космических полетов. Особенно часто находят применение случаи $n = 2, 3, 4$.

Аппарат классической небесной механики, находящий широчайшее применение и при изучении движения искусственных небесных тел, был разработан великими математиками прошлого — И. Ньютоном, Л. Эйлером, Ж. Л. Лагранжем, Ж. П. Лапласом, И. Ламбертом, К. Ф. Гауссом, Дж. Хиллом, А. М. Ляпуновым, А. Пуанкаре и другими.

4. Классическая небесная механика, созданная для нужд астрономии, интересовалась лишь *разгадкой* путей, по которым движутся небесные тела. В настоящее же время на первый план вышли новые задачи — задачи *выбора* траекторий небесных тел, создаваемых человеком.

Для космонавтики очень важны многие виды траекторий, с которыми практически не приходится встречаться при изучении движения естественных небесных тел и которые поэтому почти не рассматривались в прошлом.

Основополагающую роль в построении теории полета космических аппаратов сыграли труды К. Э. Циолковского, И. В. Мещерского, Ф. А. Цандера и других русских и советских ученых. Важную роль сыграли также работы иностранных пионеров космонавтики (Р. Годдард, Г. Оберт, В. Гоман и др.).

В течение последних десяти — пятнадцати лет советскими и зарубежными учеными были исследованы и решены многие актуальные и трудные траекторные проблемы механики космического полета.

Блестящими образцами успешного выбора траекторий для искусственных небесных тел могут служить траектории космических ракет, посланных для облета Луны и для попадания в нее, траектории автоматических межпланетных станций, направленных к Венере и Марсу, и другие.

Отметим некоторые важные задачи, которые относятся к динамике космического полета.

1. Задача о близком спутнике. Спутник планеты может иногда двигаться настолько близко от нее, что уже недопустимо считать планету материальной точкой. Если при расчете орбиты спутника мысленно сосредоточить всю массу планеты в ее барицентре (центре тяжести, центре масс), то такая орбита может значительно отличаться от реальной траектории спутника; отклонение реального положения спутника от предвычисленного (при таком допущении) может оказаться с течением времени недопустимо большим.

При расчете орбит первых искусственных спутников Земли оказалось необходимым учитывать сплюснутость Земли, то есть то обстоятельство, что более точной моделью Земли, чем шар, притягивающий как материальная точка, может служить сжатый сфероид (эллипсоид вращения).

Ошибка от пренебрежения сплюснутостью Земли сказывается тем сильнее, чем ближе к поверхности Земли происходит движение спутника. Для спутников, движущихся на расстоянии до 40 000 *км* от центра Земли, эта ошибка больше, например, чем ошибка от пренебрежения влиянием Луны и Солнца.

Эффект сжатия необходимо будет учитывать и при расчете орбит искусственных спутников планет солнечной системы (Юпитера, Марса и др.).

2. Движение космического корабля в сопротивляющейся среде. Несмотря на свою крайнюю разреженность на больших высотах, атмосфера оказывает весьма значительное тормозящее действие на движение искусственного спутника Земли. В результате такого торможения спутник снижается, совершает более быстрый облет вокруг Земли и, в конце концов, прекращает свое существование. Возникают, в частности, такие вопросы: каким образом возможно предсказать «продолжительность жизни» спутника? Каким образом влияет на движение спутника сопротивление верхних слоев атмосферы? И обратно, какие выводы о верхней атмосфере можно сделать на основании наблюдений за изменением орбиты спутника? Понятно, что эти же вопросы встанут при изучении движения искусственных спутников других небесных тел.

3. В отличие от естественных космических тел космический корабль может изменить свою траекторию в космическом пространстве благодаря временному (импульсному) включению ракетного двигателя. Это дает возможность перейти от первоначальной орбиты к другой, с совершенно иными параметрами. Такой переход носит название космического маневра.

Изучение различных видов космических маневров, выбор оптимального варианта космического маневрирования при соблюдении определенных требований (например, при минимальной затрате топлива) — актуальная задача динамики космического полета. Только применение космических маневров позволит в ближайшем будущем решить многие актуальные проблемы космонавтики, например запуск с Земли искусственных спутников Луны, Марса и Венеры.

В тесной связи с этой проблемой находится другая важная проблема — проблема встречи космических кораблей, то есть выбор такого маневра, который позволил бы одному из этих кораблей попасть в заданный момент времени в наперед заданную точку пространства с определенной, заданной скоростью.

Динамика космического полета интересуется также оптимальными (наиболее выгодными) вариантами вывода космического аппарата на орбиту, спуска с орбиты, прохож-

дения через атмосферу при возвращении космического корабля на Землю или при спуске на какую-либо другую планету.

4. Космический корабль выводится в космическое пространство на заданную траекторию с помощью ракетных двигателей. В результате работы двигателей осуществляется отброс части массы ракеты, несущей корабль. Таким образом, мы имеем дело с движением тел, чья масса меняется в процессе движения.

Понятно, что изменение массы может иметь место не только на стадии выведения корабля в космическое пространство — это будет происходить и в самом космическом пространстве при включении ракетного двигателя для космического маневра.

Изучение движения тел переменной массы (с учетом сопротивления среды, тяготения и других факторов) — одна из актуальнейших задач динамики космического полета.

5. Наряду с мощными ракетными двигателями, работающими на высококалорийном топливе в течение небольших промежутков времени, можно использовать и иные виды двигателей, источники энергии, которые создают весьма малую тягу, действующую на космический корабль в течение длительного времени. Уже сейчас разрабатываются проекты космических кораблей с ионными двигателями, кораблей, использующих давление солнечного света. В динамике космического полета рассматривается движение космических аппаратов с двигателями малой тяги, изучаются возможности использования малой тяги для осуществления космических маневров.

6. До сих пор мы рассматривали космический аппарат как материальную точку: говоря о движении аппарата, мы, по существу, имели в виду движение некоторой материальной точки — той, которая получилась бы, если вся масса аппарата была бы сосредоточена в его центре тяжести. Практически можно считать, что это и будет траектория центра тяжести аппарата. Но большой интерес представляет вопрос о движении космического аппарата относительно своего барицентра, выяснение того, будет ли аппарат вращаться вокруг этой точки, совершать колебательные или какие-либо другие движения. Одной из важных

задач динамики космического полета является исследование колебательно-вращательных движений искусственных спутников Земли.

7. На движение космических аппаратов могут оказать влияние многочисленные факторы. К ним относятся, в частности: вращение земной атмосферы, магнитное поле Земли, солнечная радиация и многие другие. В ряде случаев в космонавтике приходится принимать во внимание и эти факторы.

В настоящей книге мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых простейших задач динамики космического полета, наиболее близких к классической небесной механике.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. ВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ. НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ, СОЗДАННОГО ОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ

1. Пусть некоторая масса M сосредоточена в точке A. Такую сосредоточенную массу, как известно, называют точечной массой или материальной точкой. Мы ее для краткости будем обозначать (A, M).

Пусть, помимо материальной точки (A, M), имеется еще другая материальная точка (P, m) (рис. 1.1). Благодаря притяжению к массе M положение точки (P, m) в пространстве будет со временем меняться. Обозначим вектор $\overrightarrow{AP}$ через $\boldsymbol{r}$, а его длину — через r. Вектор силы $\boldsymbol{F}$, с которой материальная точка (A, M) притягивает материальную точку (P, m), имеет согласно закону тяготения величину $F = f\,\frac{Mm}{r^2}$. Направление же силы $\boldsymbol{F}$ противоположно направлению вектора $\boldsymbol{r}$. Поэтому единичный вектор этой силы равен $-\boldsymbol{r}/r$ и, согласно закону всемирного тяготения,

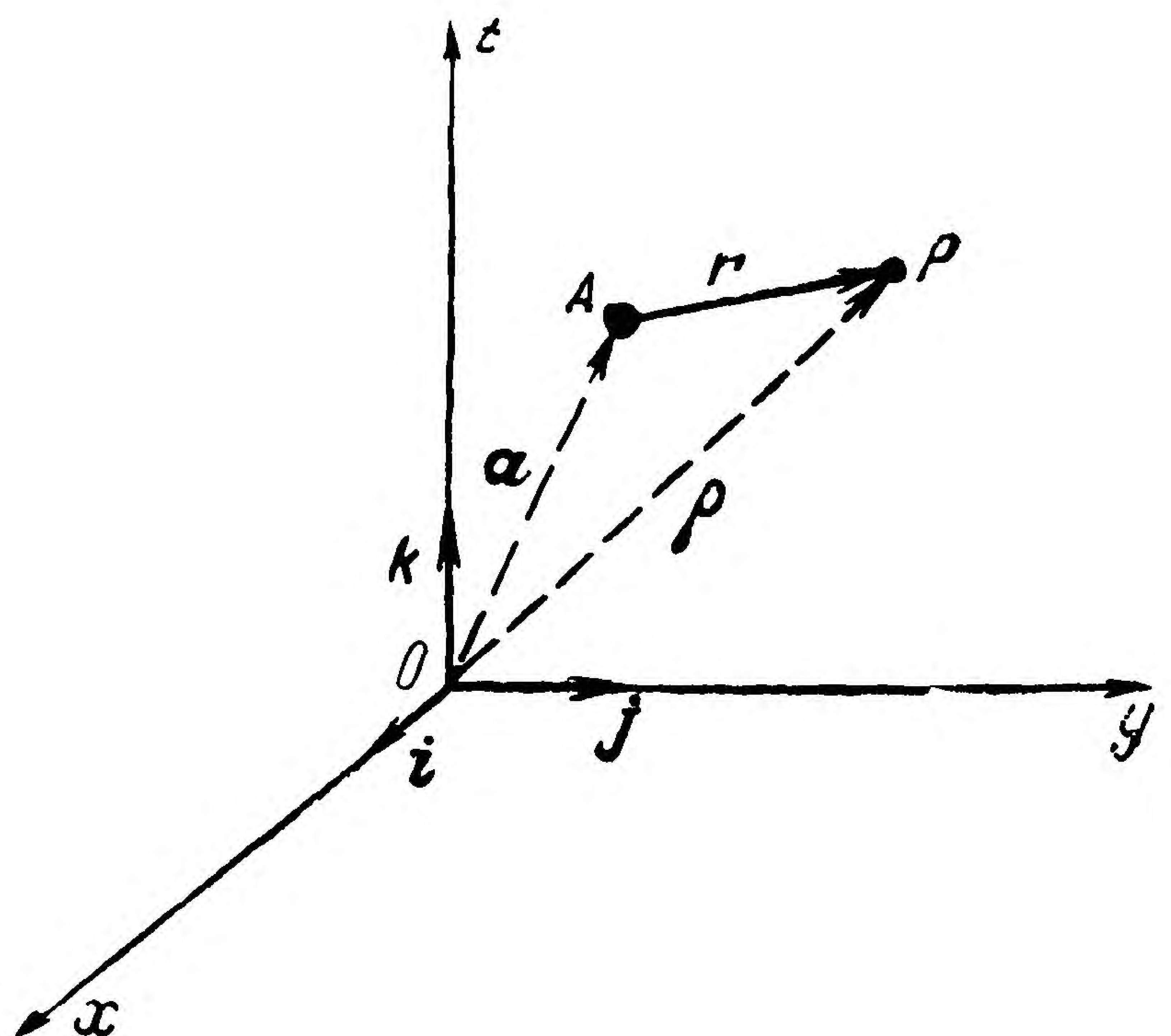


Рис. 1.1.

$$\boldsymbol{F} = f\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

или

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Выберем какую-либо систему отсчета $Oxyz$. Через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ обозначим единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz. Пусть

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}|^3}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}). \tag{2}$$

Обозначим координаты точек A и P соответственно через (a, b, c) и (x, y, z), а проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси координат — через F_x, F_y, F_z. Тогда векторное равенство (2) можно заменить тремя скалярными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\frac{Mm}{r^3}(x-a), \\ F_y &= -f\frac{Mm}{r^3}(y-b), \\ F_z &= -f\frac{Mm}{r^3}(z-c), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \tag{4}$$

Для простоты выберем начало отсчета в точке A. Тогда

$$F_x = -f\frac{Mm}{r^3}x, \quad F_y = -f\frac{Mm}{r^3}y, \quad F_z = -f\frac{Mm}{r^3}z, \tag{5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{6}$$

Для упрощения записи иногда выгодно особо выделить случай, когда в принятой системе единиц измерения $m = 1$ (в точке P помещена единичная масса). Тогда формулы (1)

и (5) примут вид

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{7}$$

$$F_x = -f\frac{M}{r^3}x, \quad F_y = -f\frac{M}{r^3}y, \quad F_z = -f\frac{M}{r^3}z. \tag{8}$$

2. Если в каждой точке (x, y, z) пространства (или какой-либо его части) определена некоторая сила $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, то говорят, что задано *силовое поле*. Поле, определяемое формулой (7), называют *центральным полем ньютоновского тяготения*.

В механике вводится понятие *потенциала* (или *силовой функции*) *поля*. Напомним определение этого понятия. Функция $U(x, y, z)$ называется потенциалом данного силового поля

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

если

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \tag{10}$$

Если такая функция $U(x, y, z)$ для данного силового поля существует, то поле называется *потенциальным*. Если у двух силовых полей силовые функции совпадают или же отличаются на постоянное число, то эти поля тоже совпадают. Иначе говоря, потенциал для данного (потенциального) силового поля определяется с точностью до произвольного слагаемого. Вектор силы в потенциальном поле определяется формулой

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{11}$$

Пусть в некоторой области пространства заданы силовые поля функциями $\boldsymbol{F}_1(x, y, z), \boldsymbol{F}_2(x, y, z), \ldots, \boldsymbol{F}_n(x, y, z)$, имеющими потенциалы $U_1(x, y, z), U_2(x, y, z), \ldots, U_n(x, y, z)$; легко доказать, что для силового поля, определяемого вектором

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{F}_1(x, y, z) + \boldsymbol{F}_2(x, y, z) + \ldots + \boldsymbol{F}_n(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k(x, y, z).$$

тоже существует потенциал $U(x, y, z)$, который равен

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z).$$

Таким образом, *потенциал суммы нескольких сил равен сумме потенциалов этих сил.*

Обратимся теперь к центральному полю ньютоновского тяготения, задаваемому формулой (7). Покажем, что *это поле является потенциальным* и что *функция*

$$U = f\frac{M}{r} \tag{12}$$

является его потенциалом. Действительно, из (12) имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = fM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -fM\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Но $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, откуда $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Следовательно

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f\frac{M}{r^3}x.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -f\frac{M}{r^3}y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -f\frac{M}{r^3}z.$$

Сопоставляя эти соотношения с формулами (8), убеждаемся в том, что функция (12) является потенциалом поля (7).

3. *Элементарной работой силового поля* на элементе пути $d\boldsymbol{r}$ называется скалярное произведение

$$\delta T = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

так что

$$\delta T = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{13}$$

Вообще говоря, не обязательно должна существовать функция, для которой это выражение служит полным дифференциалом. Поэтому, во избежание недоразумений, мы здесь и употребляем для элементарной работы обозначение δT, а не dT. Но если поле потенциально, то δT

совпадает с dU:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Итак, в этом случае

$$\delta T = dU, \quad dU = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{14}$$

Если под действием поля единичная масса переместилась из положения Q в положение P, описав некоторую дугу $\smile{QP}$, то выполненная полем работа T определяется криволинейным интегралом

$$T = \int\limits_{\smile{QP}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

В случае потенциального поля

$$T = \int\limits_{\smile{QP}} dU = U(P) - U(Q),$$

то есть T зависит не от пути, по которому перемещается единичная масса из точки Q в точку P, а только от положения этих точек. В частности, в случае центрального ньютоновского поля $T = f\frac{M}{|\overrightarrow{AP}|} - f\frac{M}{|\overrightarrow{AQ}|}$. При $AQ \to \infty$ и $AP = r$ найдем, что

$$T = f\frac{M}{r} \equiv U(r). \tag{15}$$

Таким образом, потенциал $U(r)$ ньютоновского поля имеет простой физический смысл: это — работа, которую выполняет поле при переносе единичной массы из бесконечности в данную точку P, отстоящую от A на расстоянии r.

Можно сказать и так: *силовая функция $U(r)$ — это работа, которую следует затратить, чтобы преодолеть притяжение массы M и удалить единичную массу на бесконечно большое расстояние от массы M.*

Величину $-U(x, y, z)$ называют *потенциальной энергией* поля в точке (x, y, z). В случае ньютоновского поля (7) потенциальная энергия точки, имеющей единичную массу, равна $-fM/r$.

В механике часто выгодно сначала найти потенциал силового поля, а затем уже силу, действующую в каждой точке поля. При таком способе вычисления приходится иметь дело лишь с одной скалярной функцией, а к векторным величинам переходить лишь на конечном этапе рассуждений.

Задачи

1. Какое тело притягивает Луну сильнее — Земля или Солнце? Масса Земли меньше массы Солнца в $\frac{1}{3}\cdot 10^6$ раз и больше массы Луны в 81 раз. Расстояние Луны от Земли около 380 000 *км*, расстояние Луны от Солнца около $150\cdot 10^6$ *км*.

2. Две активно гравитирующие массы M_1 и M_2 расположены в двух точках A_1 и A_2. Найдите потенциал гравитационного поля, созданного этими массами. Зная расстояния r_1 и r_2 от пассивно гравитирующей точечной массы m до точек A_1 и A_2, получите формулы для силы, действующей на массу m.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛ ШАРА СО СФЕРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

Пусть имеется тело V (рис. 1.2) с массой M и материальная точка (P, m). Тело V притягивает точку (P, m) с некоторой силой $\boldsymbol{F}$. Сила $\boldsymbol{F}$ определяется как равнодействующая сил, с которыми все частицы тела V притягивают точку (P, m). Опишем кратко способ нахождения потенциала поля тяготения к телу V. Для этого нам придется ввести понятие плотности. Выделим в теле V некоторую часть с объемом ΔV. *Средней плотностью* называется отношение массы ΔM этой части к ΔV. Предел $\delta(Q)$ этого отношения, когда часть ΔV стягивается к точке Q, называется *плотностью в точке* Q:

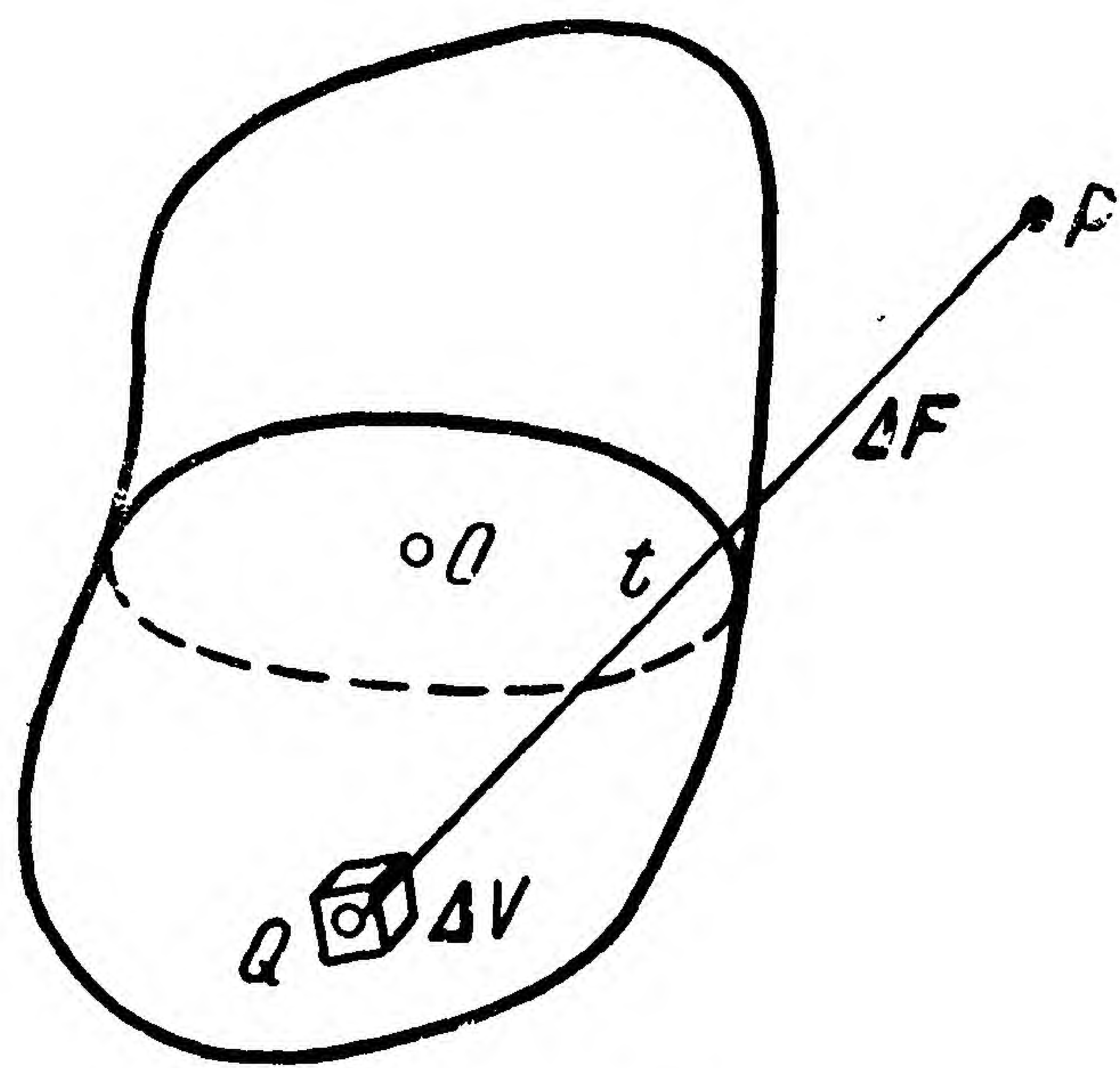


Рис. 1.2.

$$\delta(Q) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \tag{1}$$

При малом ΔV мы имеем приближенное равенство

$$\Delta M \approx \delta \Delta V,$$

где δ — плотность в точке Q объема ΔV. Обозначая через t расстояние от точки P до точки Q, найдем «элементарный» потенциал поля, создаваемого частью ΔV тела:

$$\Delta U = f\frac{\delta \Delta V}{t}.$$

Отсюда интегрированием находим выражение для потенциала поля тела V

$$U = f\iiint\limits_V \frac{\delta \cdot dV}{t}. \qquad (2)$$

Величину силы $\boldsymbol{F}$ можно выразить через потенциал по формуле (11) предыдущего параграфа.

Во многих случаях, как упоминалось во введении, в теории притяжения материальные тела заменяют материальными точками. При этом естественно считать массу тела сосредоточенной в его центре тяжести. Мысленно сосредоточим всю массу M тела V в его центре тяжести O и подсчитаем силу, с которой эта (сосредоточенная) масса притягивала бы точку (P, m). Получим некоторую новую силу $\boldsymbol{F}_1$. Справедливо ли равенство $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}$? Иначе говоря, изменится ли сила, с которой тело V притягивает материальную точку (P, m), если всю массу тела сосредоточить в его центре тяжести? Оказывается, что, вообще говоря, изменится. Более того, может оказаться, что сила $\boldsymbol{F}$ даже и не направлена к центру тяжести тела. Однако есть такие очень важные для практики случаи, когда силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}$ совпадают. Далее мы покажем, что это имеет место, в частности, если тело является шаром с так называемым сферическим распределением плотности, а точка (P, m) находится вне этого шара.

Если во всех точках, равноудаленных от центра шара, плотности равны, то говорят, что *шар имеет сферическое распределение плотности.* Простейшим примером такого шара будет однородный шар. В этом случае во всех точках шара плотность одна и та же. В общем случае можно себе

наглядно представить шар со сферическим распределением плотности как составленный из однородных сфер, имеющих общий центр и наслаивающихся одна на другую.

Найдем силу, с которой такой шар притягивает материальную точку P, имеющую единичную массу и лежащую вне шара. Для этой цели мы сначала подсчитаем потенциал шара на эту точку P (то есть значение в точке P потенциала поля тяготения к шару). Для упрощения выкладок вычислим сначала один вспомогательный интеграл.

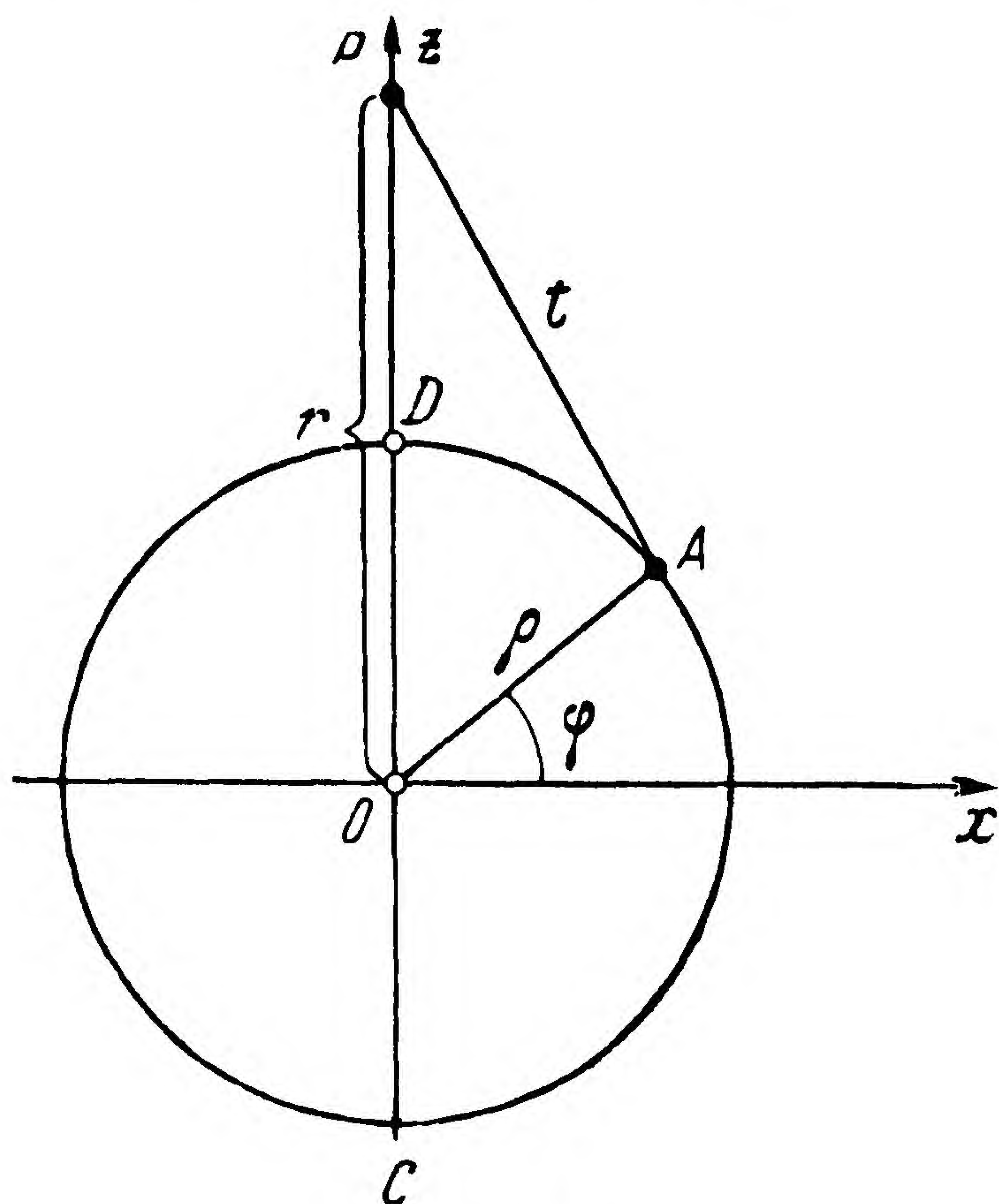


Рис. 1.3.

Лемма. Если

$$t = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi}, \tag{3}$$

$$r = \text{const},\ \rho = \text{const},\quad r \neq \rho,$$

то

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{t}\, d\varphi = \frac{1}{r\rho}\left[(r+\rho) - |r-\rho|\right]. \tag{4}$$

Геометрически t можно истолковать как расстояние от точки A $(\rho \cos \varphi,\ \rho \sin \varphi)$, лежащей на окружности $x^2 + z^2 = \rho^2$, до точки P, лежащей на луче Oz (рис. 1.3). Интеграл вычисляется в предположении, что точка A пробегает дугу CAD (правую полуокружность на рис. 1.3).

Доказательство. Так как

$$t^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi,$$

то

$$2t\, dt = -2r\rho \cos \varphi\, d\varphi,$$

$$\frac{\cos \varphi\, d\varphi}{t} = -\frac{dt}{r\rho}.$$

При $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ $t = r + \rho$; при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $t = |r - \rho|$.

Поэтому

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi = -\int_{r+\rho}^{|r-\rho|} \frac{dt}{r\rho} = \frac{1}{r\rho}\,[(r+\rho) - |r-\rho|].$$

В частности, при $r > \rho$ найдем:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi = \frac{2}{r}\,. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Если шар имеет сферическое распределение плотности, то его потенциал на внешнюю точку не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.*

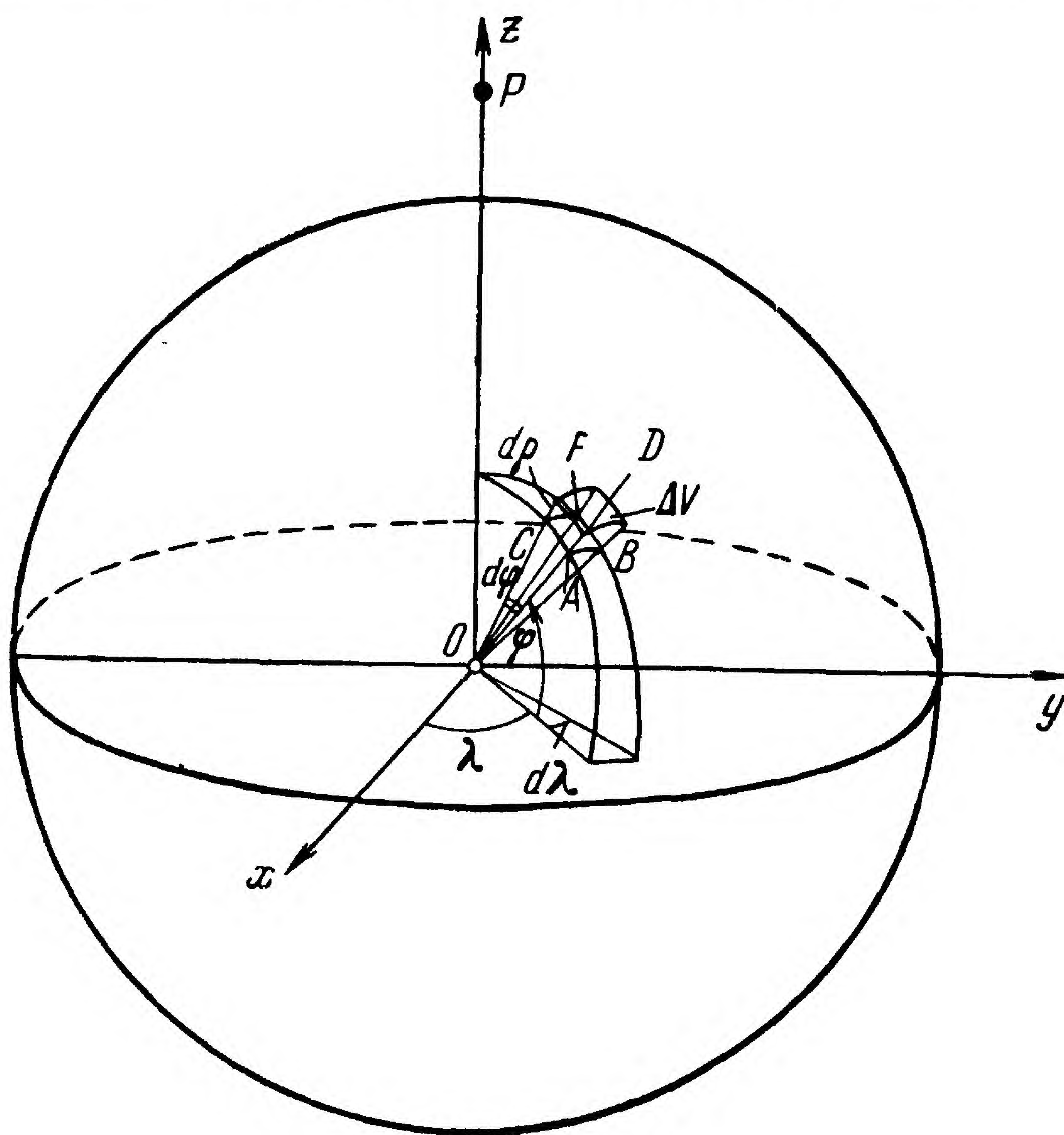


Рис. 1.4.

Доказательство. Пусть M — масса шара, R — его радиус, $\delta(\rho)$ — плотность шара в точке, отстоящей от центра на расстоянии ρ. Положение точки A внутри шара характеризуется сферическими координатами ρ, φ, λ. Здесь ρ — расстояние точки A от центра шара; φ — широта точки A, λ — долгота этой точки.

Вырежем из шара элемент объема ΔV с помощью следующих поверхностей (рис. 1.4):

а) двух сфер радиусов ρ и $\rho + d\rho$ соответственно;

б) двух меридиональных плоскостей, образующих с осью Ox углы λ и $\lambda + d\lambda$;

в) двух плоскостей, определяемых следующими двумя тройками точек:

$$O,\ A\ (\rho, \varphi, \lambda),\ B\ (\rho, \varphi, \lambda + d\lambda);$$
$$O,\ C\ (\rho, \varphi + d\varphi, \lambda),\ F\ (\rho, \varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda).$$

Нетрудно подсчитать, что с точностью до бесконечно малых порядка выше первого (относительно $d\rho$, $d\varphi$, $d\lambda$)

$$AC = \rho\, d\varphi,\ AB = \rho \cos \varphi\, d\lambda,\ AD = d\rho.$$

Поэтому элемент ΔV имеет объем

$$dV = \rho^2 \cos \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda.$$

Его масса

$$dM = \delta\ (\rho)\ \rho^2 \cos \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda.$$

Масса всего шара

$$M = \iiint\limits_V \delta\ (\rho)\ \rho^2 \cos \varphi\ d\rho\, d\varphi\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^R \delta\ (\rho)\ \rho^2\, d\rho \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi\, d\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\lambda,$$

то есть

$$M = 4\pi \int\limits_0^R \delta\ (\rho)\ \rho^2\, d\rho. \tag{6}$$

Пусть теперь в точке P помещена единичная масса. Мы можем считать, что точка P лежит на оси Oz. Потенциал массы dM на точку P равен $f\, \frac{dM}{t}$, где $t = AP$; $OP = r > R$.

По формуле (2) находим теперь потенциал поля шара в точке P:

$$U = f \iiint\limits_V \delta\ (\rho) \frac{\rho^2 \cos \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda}{t},$$

$$t = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi},$$

и для вычисления U можно воспользоваться доказанной леммой:

$$U = f\int_0^R \delta(\rho)\,\rho^2\,d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda =$$

$$= \frac{f}{r}\,4\pi \int_0^R \delta(\rho)\,\rho^2\,d\rho = f\,\frac{M}{r}. \qquad (7)$$

Но в точности такой же потенциал на точку P мы получим, если сосредоточим всю массу шара в его центре O. Теорема доказана.

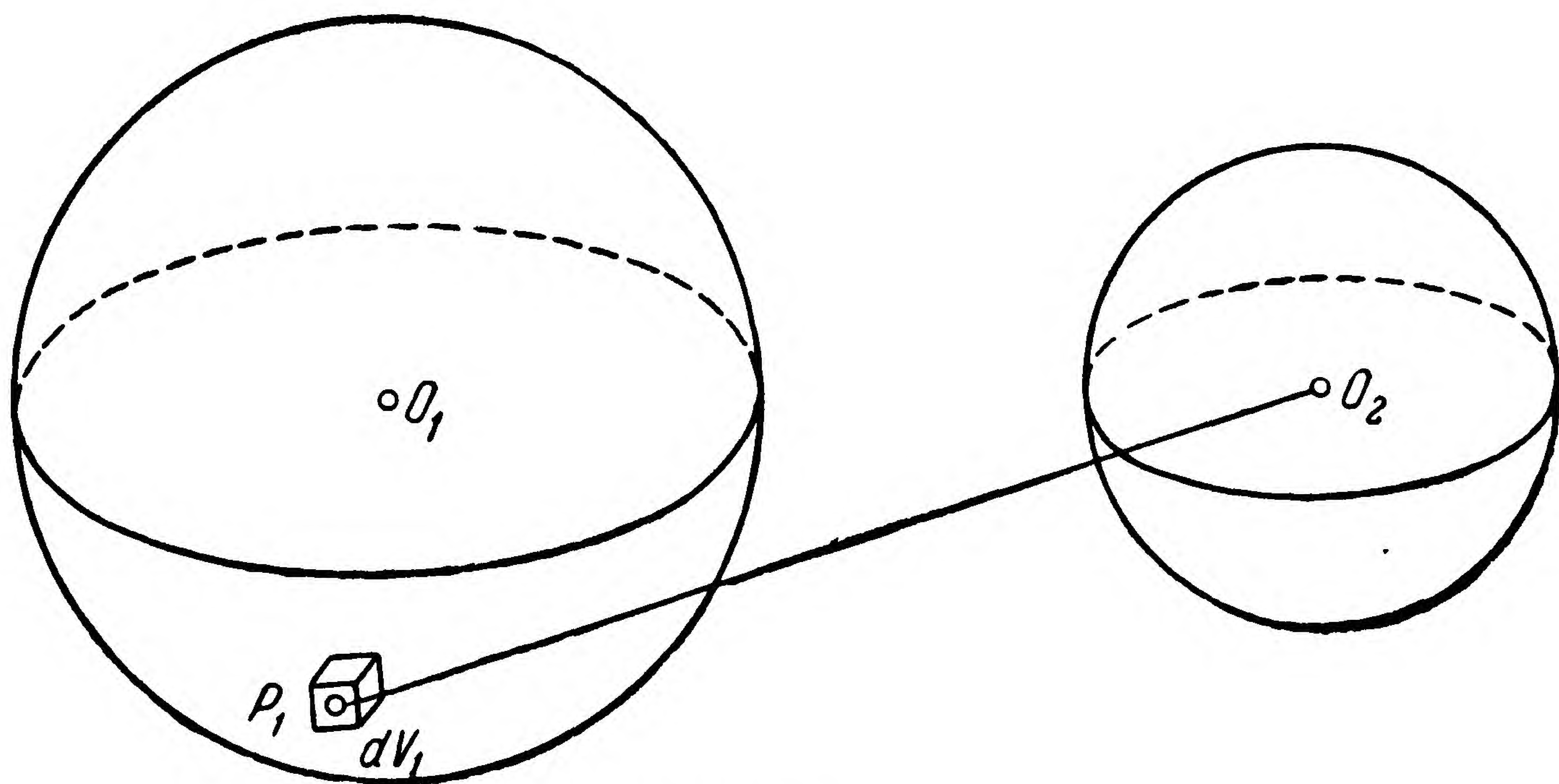


Рис. 1.5.

С л е д с т в и е. Сила, с которой шар со сферическим распределением плотности притягивает лежащую вне его материальную точку (P, m), не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

Опираясь на это следствие, сделаем важное заключение о силе взаимодействия *двух шаров*, имеющих сферическое распределение плотности и расположенных один вне другого. Под силой, с которой одно тело притягивает второе тело, понимают равнодействующую всех сил, с которыми частицы первого тела притягивают частицы второго тела.

Теорема 2. *Если два тела являются внешнерасположенными шарами*) со сферическим распределением плотности, то сила, с которой один из них притягивает к себе другой шар, не изменится, если массы этих шаров сосредоточить в их центрах.*

Доказательство. Обозначим массы шаров через M_1 и M_2, центры шаров через O_1 и O_2. Выделим внутри первого шара (рис. 1.5) элемент объема dV_1 с массой dM_1. Если «тело» dV_1 достаточно мало, то можно рассматривать его как материальную точку и всю его массу считать сосредоточенной в одной какой-либо точке P_1. Так как второй шар имеет сферическое распределение плотности, то силу, с которой он притягивает элемент dM_1, можно считать равной

$$f\frac{M_2\,dM_1}{|\overrightarrow{O_2P_1}|^2}$$

и направленной по прямой от P_1 к O_2. В силу третьего закона Ньютона элемент dM_1 притягивает второй шар с силой, равной $fM_2\cdot dM_1/|\overrightarrow{O_2P_1}|^2$ и направленной от O_2 к P_1. Но в точности с такой же силой притягивает масса dM_1 точечную массу M_2, сосредоточенную в точке O_2. Поэтому равнодействующая всех сил, с которыми *все* элементы dM_1 первого шара притягивают второй шар, равна равнодействующей сил, с которыми элементы первого шара притягивают точечную массу M_2, сосредоточенную в точке O_2.

Так как первый шар также обладает сферическим распределением плотности, то согласно следствию из предыдущей теоремы эта равнодействующая равна $fM_1M_2/|\overrightarrow{O_1O_2}|^2$ и направлена по прямой O_1O_2. А это и требовалось доказать.

Рассмотренные в этом параграфе случаи весьма важны для космонавтики. В частности, при изучении движения искусственных спутников Земли в течение небольшого промежутка времени (порядка одного-двух оборотов спутника

---

*) То есть такими шарами, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов.

вокруг Земли) мы получим удовлетворительную информацию об этом движении, если будем считать Землю шаром со сферическим распределением плотности, а спутник — материальной точкой.

Задачи

1. Представим себе гантель (рис. 1.6): два материальных шара A и B равной массы m, соединенных недеформируемым стержнем, масса которого ничтожно мала по сравнению с массой шаров. Гантель притягивает с некоторой силой точечную массу M, помещенную в точке P на продолжении отрезка AB. Изменится ли эта сила, если всю массу гантели сосредоточить в ее центре тяжести (то есть в середине O отрезка AB)?

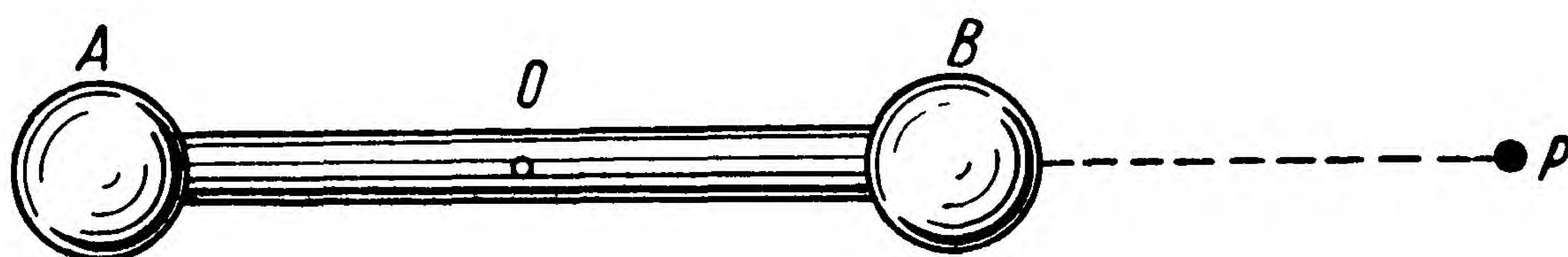


Рис. 1.6.

2. Однородный прямолинейный массивный стержень притягивает материальный шарик, причем стержень и шарик расположены на одной прямой (рис. 1.7). Изменится ли сила, с которой стержень притягивает

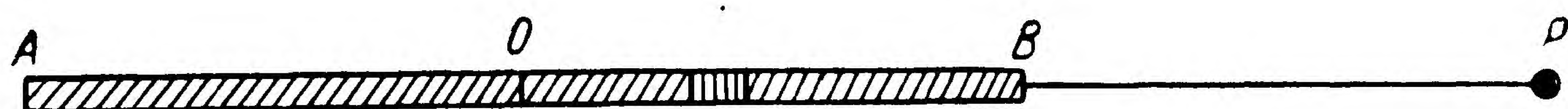


Рис. 1.7.

шарик, если сосредоточить всю массу стержня в его центре тяжести? В расчетах пренебречь толщиной стержня и размерами шарика, то есть стержень рассматривать как прямолинейный отрезок, а шарик — как материальную точку.

3. Пусть имеется однородная материальная сфера (поверхность шара). Докажите, что сила, с которой эта сфера притягивает материальную точку, лежащую вне сферы, не изменится, если всю массу сферы сосредоточить в ее центре. Остается ли это утверждение верным, если точка лежит внутри сферы? Как обстоит дело в этом случае?

4. Некоторые особенности движения спутника Марса Фобоса привели советского астронома И. С. Шкловского к предположению, что Фобос является *полым* телом (вероятно, искусственного происхождения).

Будем полагать, что Фобос представляет собой однородный полый шар (то есть тело, ограниченное двумя концентрическими сферами

радиуса R и R_1, $R_1<R$). Если поместить малое тело («материальную точку») в центр полого шара, то, очевидно, силы, действующие на это тело, уравновесятся. Найдите результирующую силу, с которой Фобос притягивает материальную точку (единичной массы), помещенную в *произвольной* точке P внутри его полости (то есть внутри сферы радиуса R_1).

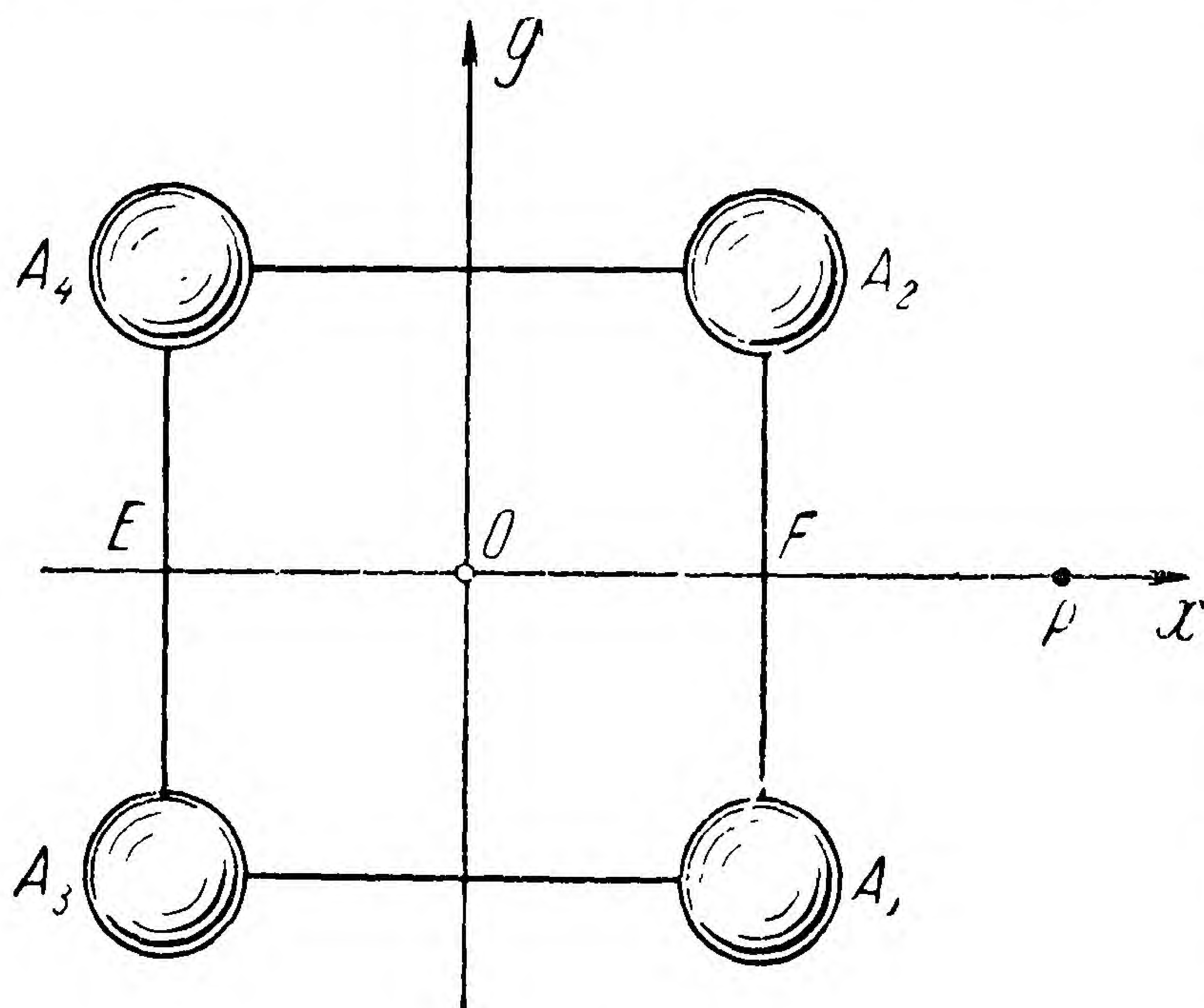


Рис. 1.8.

5. Четыре равных однородных шара, каждый с массой M, имеют своими центрами вершины квадрата $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 1.8) со стороной a. На прямой EF, соединяющей середины двух противоположных сторон квадрата, на расстоянии a от его центра расположена материальная точка (P, m). Изменится ли сила, с которой четверка шаров притягивает точку (P, m), если суммарную массу этих шаров сосредоточить в центре симметрии квадрата?

§ 3. ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА НЕСФЕРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

1. Пусть имеется тело, не являющееся шаром со сферическим распределением плотности. Рассмотрим задачу нахождения потенциала такого тела на внешнюю точку P.

Обозначим данное тело через V, его массу через M, его барицентр (центр тяжести) через O. Пусть l — любая прямая, проходящая через O. *Моментом инерции* тела относительно оси l называется в механике следующая величина:

$$J_l = \iiint\limits_V r^2\, dM, \tag{1}$$

где dM — элемент массы, а r — его расстояние до оси l. Для каждого тела существует тройка взаимно перпендикулярных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, называющихся главными осями инерции (рис. 1.9). Эти оси проходят через центр тяжести тела O и характеризуются тем свойством, что момент

инерции тела относительно любой оси l выражается через моменты инерции того же тела относительно главных осей A, B, C по формуле

$$J_l = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ — углы между осью l и осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

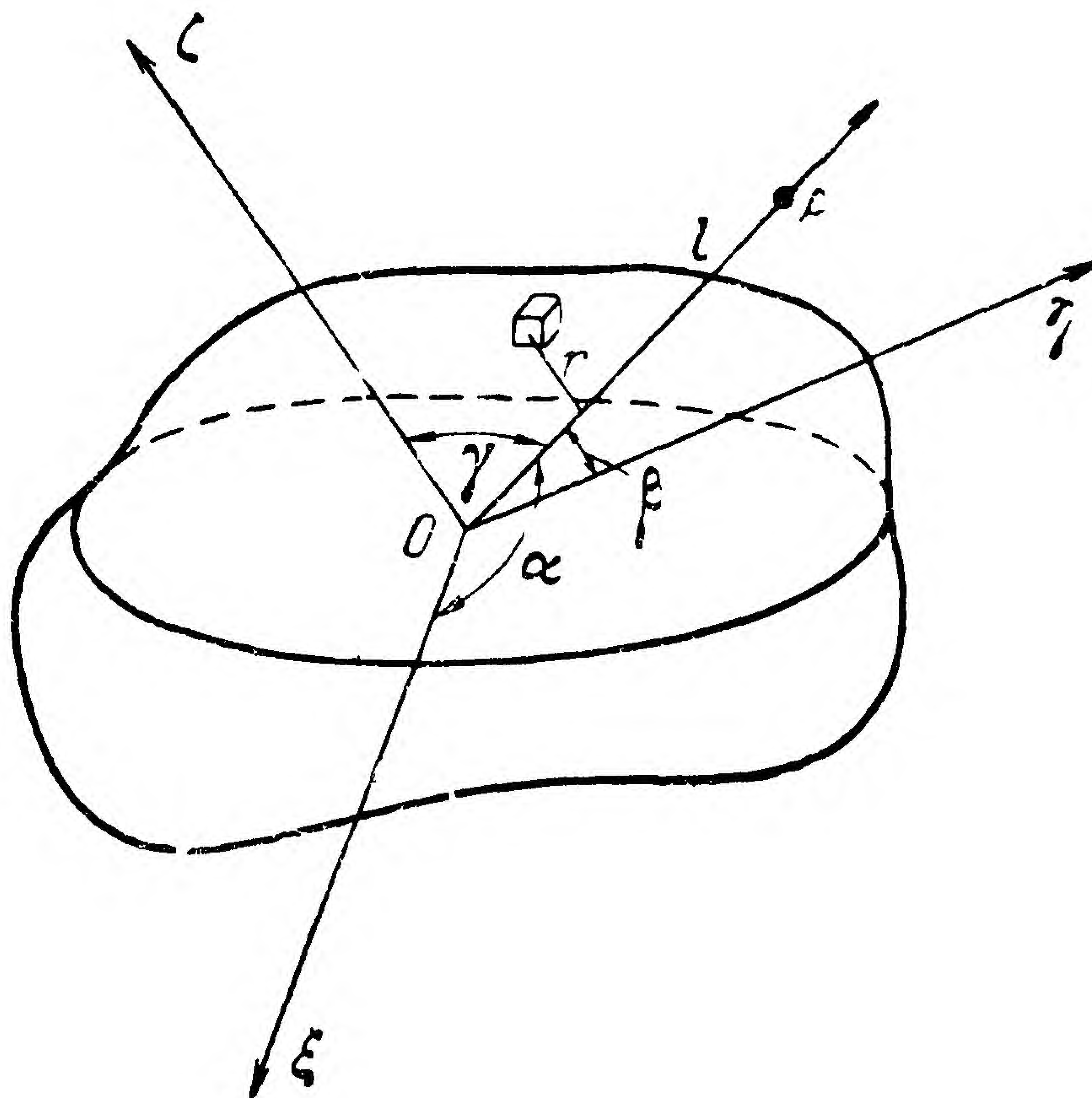


Рис. 1.9.

Если бы вся масса M тела V была сосредоточена в его барицентре O, то потенциал тела на точку P был бы равен fM/r, где $r = OP$. В действительности же, как можно показать, потенциал тела V на ту же точку P может быть представлен в виде бесконечного сходящегося ряда, расположенного по возрастающим степеням величины $1/r$. Этот ряд имеет вид

$$U = f\left[\frac{M}{r} + \frac{A+B+C-3J_l}{r^3} + \ldots\right]. \qquad (3)$$

Здесь l — ось OP.

Можно показать, что для тела V со сферическим распределением плотности все слагаемые в скобках, кроме первого, равны нулю (в частности, тогда $J_l = A = B = C$). Если тело по своей структуре мало отличается от такого шара или если точка P находится далеко от точки O (r велико), то U будет мало отличаться от первого слагаемого в формуле (3):

$$U \approx f\frac{M}{r}.$$

Таким образом, в первом приближении можно и в этих случаях считать всю массу тела сосредоточенной в его центре тяжести. Однако для получения более точных результатов необходимо учитывать хотя бы некоторые из отброшенных членов в формуле (3).

Рассмотрим пример. Достаточно хорошие прогнозы относительно движения высоколетящих спутников Земли (например, обращающихся на высоте 40—50 тыс. *км*) можно получить, если считать Землю шаром со сферическим распределением плотности. Такое допущение, как мы уже отметили выше, приведет к полезному первому приближению и в случае низколетящего спутника, если нас интересует его движение лишь в течение небольшого промежутка времени. Если же нас интересует движение низколетящего спутника Земли в течение длительного промежутка времени, то для получения результатов, хорошо согласующихся с практикой, необходимо пользоваться другой, более точной моделью Земли, например рассматривать Землю как сжатый сфероид (эллипсоид вращения). В еще большей мере такой подход полезен при изучении движения искусственных спутников других планет, например Юпитера, Нептуна, Марса, которые значительно более сплюснуты, чем Земля. В качестве меры сплюснутости (сжатия) планеты принимают отношение

$$\alpha = \frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}}, \tag{4}$$

где $R_{\text{экв}}$ — экваториальный радиус планеты, $R_{\text{пол}}$ — полярный радиус. Например, для Земли $\alpha \approx {}^1/_{300}$, для Марса $\alpha \approx {}^1/_{150}$, для Юпитера $\alpha \approx {}^1/_{60}$.

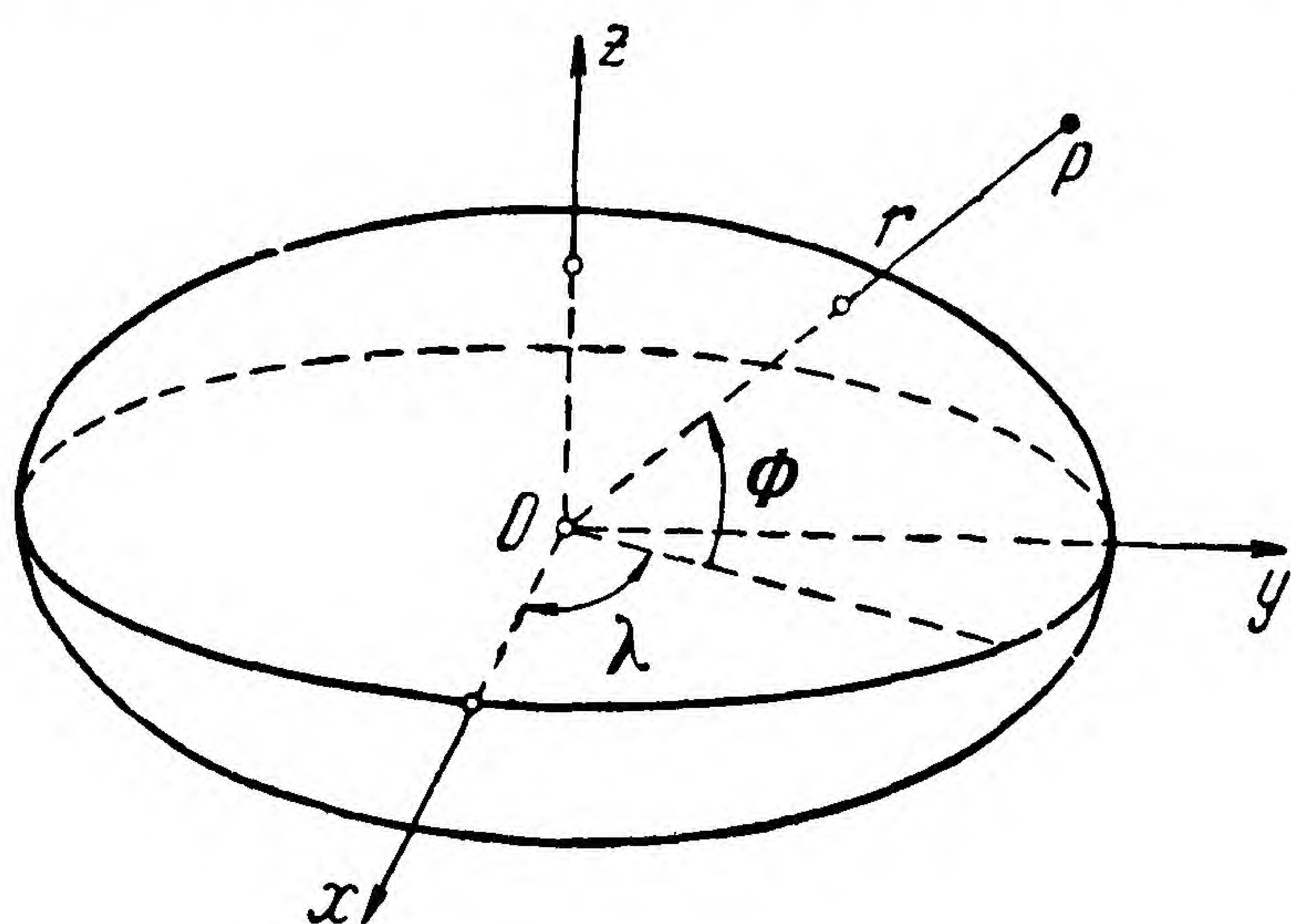


Рис. 1.10.

Принимая, что сила, с которой близкий спутник притягивается к сжатой планете, все время направлена к ее центру, мы можем иногда прийти к весьма неточным или даже ошибочным выводам.

2. Рассмотрим несколько подробнее вопрос о потенциале сжатого сфероида на расположенную вне его точку P (рис. 1.10).

Обозначим массу сфероида через M, а его экваториальный радиус через R. Выберем неподвижную (инерциальную)

систему отсчета $Oxyz$ с началом в центре симметрии сфероида; за плоскость Oxy примем его экваториальную плоскость. Положение точки P можно охарактеризовать либо тремя декартовыми координатами x, y, z, либо тремя сферическими координатами r, Φ, λ, где $r = OP$, Φ — широта точки P, то есть угол наклона вектора $\overrightarrow{OP}$ к экваториальной плоскости, λ — долгота точки P.

Предположим, что во всех точках сфероида, имеющих одни и те же координаты r и Φ, но разные значения долготы λ, плотность одна и та же (в точках, симметричных относительно плоскости экватора, плотность может, вообще говоря, оказаться различной). Потенциал сфероида на точку P можно представить бесконечным рядом

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + J_3\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_3(\sin\Phi) + J_4\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_4(\sin\Phi) + \ldots\right]. \quad (5)$$

Здесь J_2, J_3, J_4, . . . — некоторые вполне определенные для данного сфероида константы, зависящие от его размеров, формы и распределения масс внутри него, а $P_2(q)$, $P_3(q)$, $P_4(q)$, . . . — функции от t, называемые полиномами Лежандра, которые можно определить с помощью формулы

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dq^n}(q^2 - 1)^n. \quad (6)$$

Например,

$$P_0(q) = 1, \quad P_1(q) = q, \quad P_2(q) = \frac{1}{2}(3q^2 - 1),$$

$$P_3(q) = \frac{1}{2}(5q^3 - 3q), \ldots$$

Заметим, что для сжатого сфероида $J_2 < 0$. Для земного сфероида

$$J_2 = -(1082{,}23 \pm 0{,}03)\cdot 10^{-6},$$
$$J_3 = (2{,}3 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-6},$$
$$J_4 = (2{,}12 \pm 0{,}05)\cdot 10^{-6}.$$

Члены ряда (5) являются, очевидно, периодическими функциями от Φ (с периодом 2π). Они называются *зональными гармониками* соответственно нулевого, второго, третьего и т. д. порядка.

Из (5), ограничиваясь только первыми двумя членами разложения, получим приближенную формулу для потенциала сфероида

$$U \approx f\frac{M}{r}\left[1 + J_2\frac{R^2}{r^2}P_2(\sin\Phi)\right].$$

Так как $P_2(\sin\Phi) = \frac{1}{2}(3\sin^2\Phi - 1)$, то

$$U \approx \frac{fM}{r} - \varepsilon\frac{\sin^2\Phi - \frac{1}{3}}{r^3}, \qquad (7)$$

где

$$\varepsilon = -\frac{3}{2}J_2 fMR^2.$$

В том случае, когда сфероид обладает механической симметрией относительно экваториальной плоскости (то есть в точках, симметричных относительно этой плоскости, плотность одна и та же), его потенциал на любую внешнюю точку P может быть вычислен по более простой формуле, чем (5):

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + J_4\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_4(\sin\Phi) + \right.$$
$$\left. + J_6\left(\frac{R}{r}\right)^6 P_6(\sin\Phi) + \ldots\right]. \qquad (8)$$

Заметим, что в случае земного сфероида влияние зональных гармоник порядка выше четвертого мало, а коэффициенты J_k при $k > 4$ известны весьма грубо. Поэтому при изучении движения искусственных спутников можно получить хорошее приближение, если в формуле для U пренебречь членами, в которых $1/r$ входит в степени выше четвертой. Однако такой подход приводит к весьма громоздким выкладкам, а расчеты траектории оказываются очень длительными.

В течение последних лет было предложено несколько различных способов такой замены потенциала сжатого сфероида другим, близким потенциалом, при которой дальнейшие расчеты движения спутника становятся значительно менее громоздкими [М. Д. Кислик (СССР), Дж. П. Винти (США)]. Весьма интересный способ был пред ложен в 1960—1962 годах Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым [1.1]. Изложим его сущность. Пусть имеются две (активно гравитирующие) точечные массы M_1 и M_2, расположенные в двух фиксированных (не меняющих своего положения) точках A_1 и A_2, отстоящих друг от друга на расстоянии $2a$. Материальные точки (A_1, M_1) и (A_2, M_2) создают силовое поле с потенциалом

$$U_0 = f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right), \tag{9}$$

где r_1 и r_2 — это расстояния от точек A_1 и A_2 до точки $(P, 1)$ единичной массы. Если в некоторой прямоугольной системе координат точки A_1, A_2 и P имеют соответственно координаты $(0, 0, -a)$, $(0, 0, a)$ и (x, y, z), то

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Пусть известны положение и скорость точки P в один какой-то момент времени и требуется определить движение точки P (то есть найти положение и скорость точки P в любой другой момент времени). Эта задача, которая носит название *задачи о двух фиксированных центрах*, была решена в замкнутом виде еще в XVIII веке известным математиком Л. Эйлером.

Нас будет интересовать случай $M_1 = M_2 = \frac{1}{2} M$.

Известные методы решения задачи о двух фиксированных центрах применимы и для того случая, когда некоторое силовое поле задается потенциалом вида (9), где a — чисто мнимое число: $a = ci$ ($c > 0$, i — мнимая единица). При этом r_1 и r_2 оказываются мнимыми, но сопряженными числами (если одно из них имеет вид $A + Bi$, то второе имеет вид $A - Bi$). Поэтому — при нашей оговорке,

что $M_1 = M_2 = \frac{1}{2} M$, — потенциал U_0 будет вещественной функцией

$$U_0 = \frac{1}{2} fM \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \tag{11}$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ci)^2}, \; r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ci)^2}. \tag{12}$$

Для нас сейчас несущественно, при каком именно реальном распределении масс может возникнуть такой потенциал,— важно то, что при таком потенциале можно получить достаточно удобные формулы, описывающие движение материальной точки P. В теории полиномов Лежандра устанавливается такая формула:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\alpha + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\lambda). \tag{13}$$

Пользуясь ею, можно разложить функцию U_0 в ряд по полиномам Лежандра. Положим в этой формуле $\lambda = z/r = \sin \Phi$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и $\alpha = i \frac{c}{r}$. Тогда найдем, что

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1/r}{\sqrt{1 - 2i \frac{z}{r} \frac{c}{r} - \frac{c^2}{r^2}}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \frac{c}{r} \right)^n \cdot P_n \left(\frac{z}{r} \right).$$

Аналогично

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-i \frac{c}{r} \right)^n \cdot P_n \left(\frac{z}{r} \right),$$

откуда

$$U_0 = f \frac{M}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r} \right)^{2k} \cdot P_{2k} (\sin \Phi) \right]. \tag{14}$$

Сравним формулы (8) и (14). Если положить $c = \sqrt{-J_2}$ ($-J_2$ — положительное число), то у рядов (8) и (14) окажутся соответственно равными первые два члена. Числен-

ный подсчет показывает, что третьи члены у этих рядов обычно тоже достаточно близки (например, если речь идет о земном сфероиде). Полагая $\Delta = U - U_0$, имеем

$$U = U_0 + \Delta.$$

Таким образом, потенциал сфероида распадается на два слагаемых, из которых одно (U_0) мало отличается от U; второе слагаемое Δ не только мало, но еще содержит параметры, которые практически определяются весьма неточно. U_0 можно назвать *нормальной составляющей потенциала сфероида*, а Δ — его *аномальной* частью. Гравитационное поле с потенциалом U_0 можно назвать *нормальным гравитационным полем сфероида*. На практике при изучении движения спутника в поле сжатого сфероида мы получим достаточно хороший результат, если вместо поля с потенциалом U будем рассматривать движение спутника в поле с потенциалом U_0. Та же идея использования потенциала задачи двух неподвижных центров (9) при мнимых значениях некоторых параметров (расстояний, масс) может быть применена и для того случая, когда сфероид не обладает механической симметрией относительно экваториальной плоскости. Потенциал сфероида в этом случае имеет вид (5) и заменяется потенциалом вида (9), но с комплексными параметрами. Такая модель сфероида выгодна в тех случаях, когда мы хотим учесть при движении спутника Земли ее грушевидность.

ГЛАВА II

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Во многих случаях можно получить достаточно хорошее представление о движении какого-либо небесного тела (по крайней мере в течение небольшого промежутка времени), если учесть воздействие на него лишь одного,

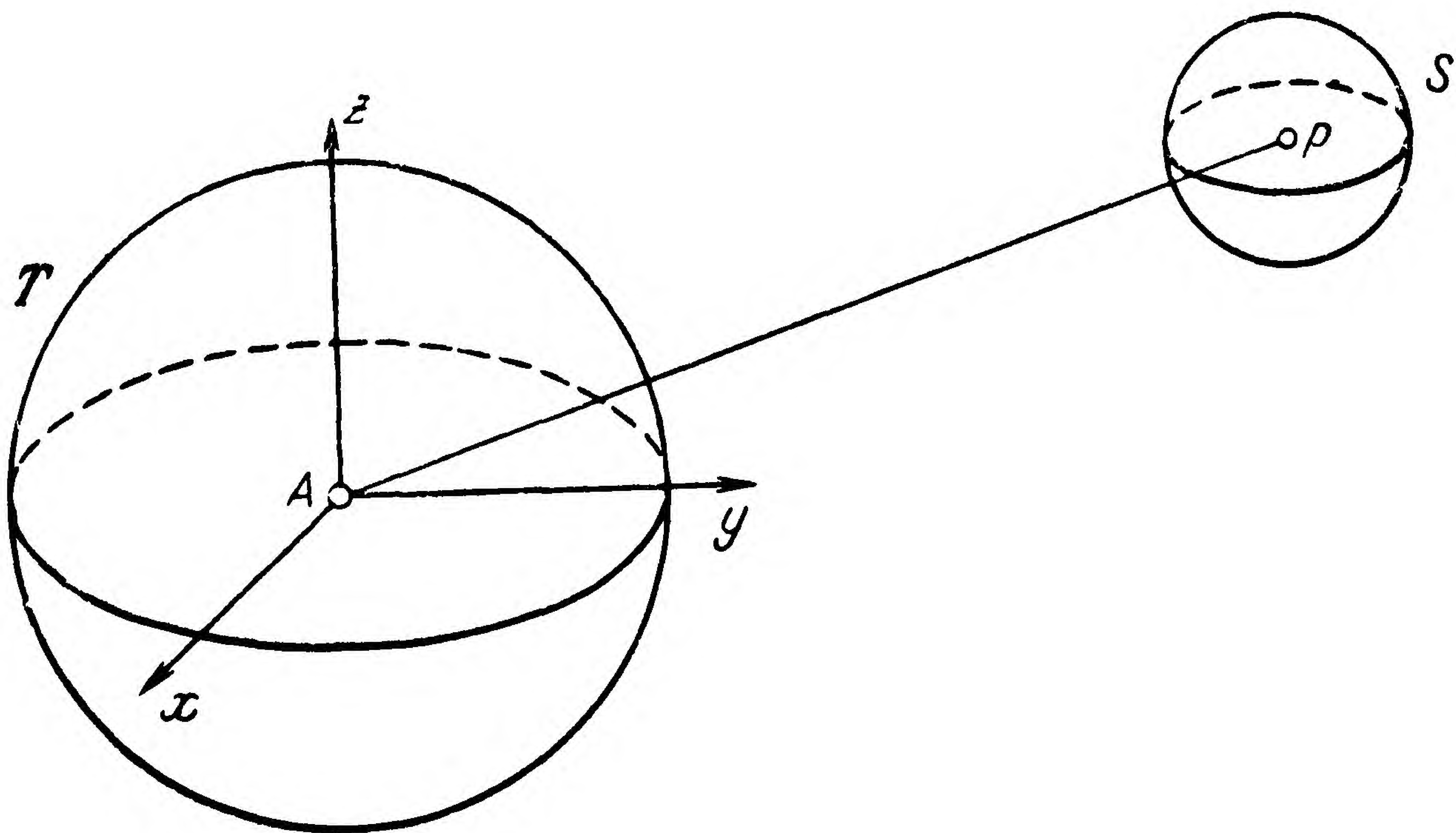


Рис. 2.1.

наиболее сильно притягивающего его тела и пренебречь влиянием всех других небесных тел. Так, например, обстоит дело при изучении движения Земли вокруг Солнца или близкого искусственного спутника вокруг Земли.

Пусть нас интересует движение тела S в гравитационном поле, созданном другим телом T (рис. 2.1). Это движение будем рассматривать в системе отсчета с началом в барицентре (центре тяжести, центре масс) A тела T и с осями,

постоянно ориентированными в пространстве. Если размеры тела S малы по сравнению с расстояниями его точек до точек тела T, то мы получим достаточно хорошее представление о движении любой его точки, если изучим движение той материальной точки (P, m), которая образуется, если всю массу тела S сосредоточить в его барицентре P. В результате такого сосредоточения массы траектория барицентра P тела S практически не изменится. Когда говорят о траектории некоторого *тела* S и о его скорости, имеют в виду траекторию и скорость материальной *точки* (P, m). Что касается тела T, то будем в этой главе считать, что оно является шаром со сферическим распределением плотности. Поэтому сила, действующая на материальную точку (P, m), не изменится, если мы будем считать всю массу M тела T сосредоточенной в его барицентре A.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: *изучить движение точечной массы* m, *происходящее в гравитационном поле, созданном некоторым телом* T, *если это тело является шаром со сферическим распределением плотности.*

При сделанном выше предположении о теле T эта задача равносильна, очевидно, такой задаче: *изучить движение материальной точки* (P, m) *в гравитационном поле, созданном другой материальной точкой* (A, M).

При этом движение будем рассматривать относительно точки A, то есть в системе отсчета с началом в точке A и с осями, сохраняющими ориентацию в пространстве.

Эту задачу обычно называют *задачей двух тел* (точнее было бы назвать ее «задачей двух материальных точек»).

Тело T, в поле тяготения которого рассматривается движение материальной точки (P, m), будем называть в дальнейшем *центральным телом*. В вопросах космонавтики центральным телом может оказаться Земля, Луна, Солнце, какая-либо планета, звезда и т. п.

Если в каких-либо рассуждениях вся масса M центрального тела считается сосредоточенной в одной точке A, то материальную точку (A, M) будем еще называть *притягивающим центром*. Материальную точку (P, m), чье движение относительно центрального тела T изучается, назовем условно, для краткости, его *спутником*.

Например, при изучении движения Земли вокруг Солнца роль центрального тела будет выполнять Солнце, роль спутника — Земля. При изучении движения искусственного спутника вокруг Земли роль центрального тела играет Земля.

Вектор $\overrightarrow{AP}$, у которого начало—притягивающий центр A, а конец — спутник P, будем называть *радиусом-вектором спутника*.

2. Для космонавтики особенно интересен тот случай, когда масса спутника ничтожна по сравнению с массой центрального тела. В таком случае притяжение спутника практически не сказывается на движении центрального тела, не сообщает ему ощутимого ускорения. Этой физической картине соответствует следующая *математическая модель*: спутник рассматривается как материальная точка, притягиваемая к центральному телу, но не притягивающая это тело.

Мы, таким образом, имеем дело со следующей задачей, которую можно назвать *ограниченной задачей двух тел* или задачей о непритягивающем (пассивно гравитирующем) спутнике: *изучить движение материальной точки* (P, m) (*спутника*) *в ньютоновском поле тяготения другой материальной точки* (A, M) (*притягивающего центра*) *при допущении, что спутник вовсе не притягивает к себе притягивающий центр*.

Наглядно картину можно представить себе как движение спутника вокруг «закрепленного в пространстве» центрального тела (звезды, планеты), точнее—вокруг тела, неподвижного относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Спутник, не влияющий на движение центрального тела, мы условимся еще называть «малым спутником»*).

Запишем теперь дифференциальные уравнения движения непритягивающего спутника (P, m) относительно притягивающего центра (A, M).

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета, в которой притягивающий центр (A, M) остается неподвижным (рис. 2.2). Пусть $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\rho}$, $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r}$, M — масса

*) Иногда его называют — не совсем удачно— «бесконечно малым телом» или «телом бесконечно малой массы».

притягивающего центра, m — масса спутника. По второму закону Ньютона

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}. \tag{1}$$

Число

$$K \equiv fM \tag{2}$$

будем называть *гравитационным параметром* притягивающего центра. Для Солнца $K_С = 1325 \cdot 10^8$ *км*^{3}/*сек*^{2}, для Луны $K_Л = 4900$ *км*^{3}/*сек*^{2}, для Земли $K_З = 398\ 600$ *км*^{3}/*сек*^{2} *). Уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + K\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{3}$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} + K\frac{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}|^3} = 0. \tag{4}$$

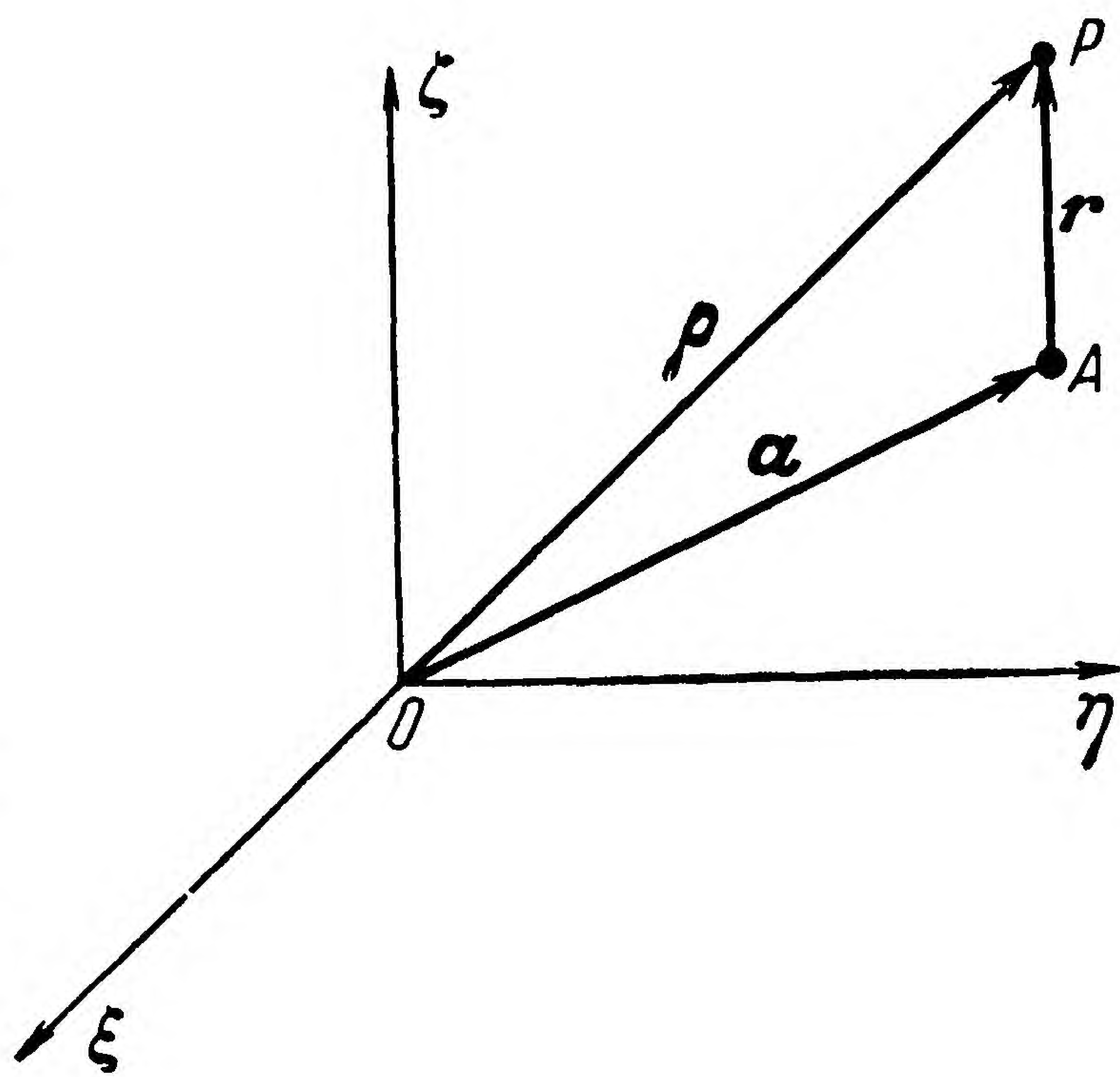


Рис. 2.2.

3. Рассмотрим теперь общий случай задачи двух материальных точек (*случай притягивающего спутника*).

Пусть притягивающий центр A имеет массу M, а спутник P — массу m. Выберем в пространстве «неподвижную» (точнее говоря, инерциальную) систему отсчета $O\xi\eta\zeta$ и другую систему отсчета $Axyz$ с началом в точке A, причем оси Ax, Ay, Az соответственно параллельны осям $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ и одинаково направлены с ними (рис. 2.3). На движение спутника в пространстве влияет по-прежнему притяжение центрального тела. Но в свою очередь спутник, притягивая центральное тело, сам «сдвигает» его в «абсолютном», «неподвижном» (инерциальном) пространстве, и этот фактор также сказывается на положении спутника.

*) Гравитационные параметры планет приведены в приложении.

Сохраним обозначения, принятые выше в случае непритягивающего спутника. На точку (P, m) теперь действует сила

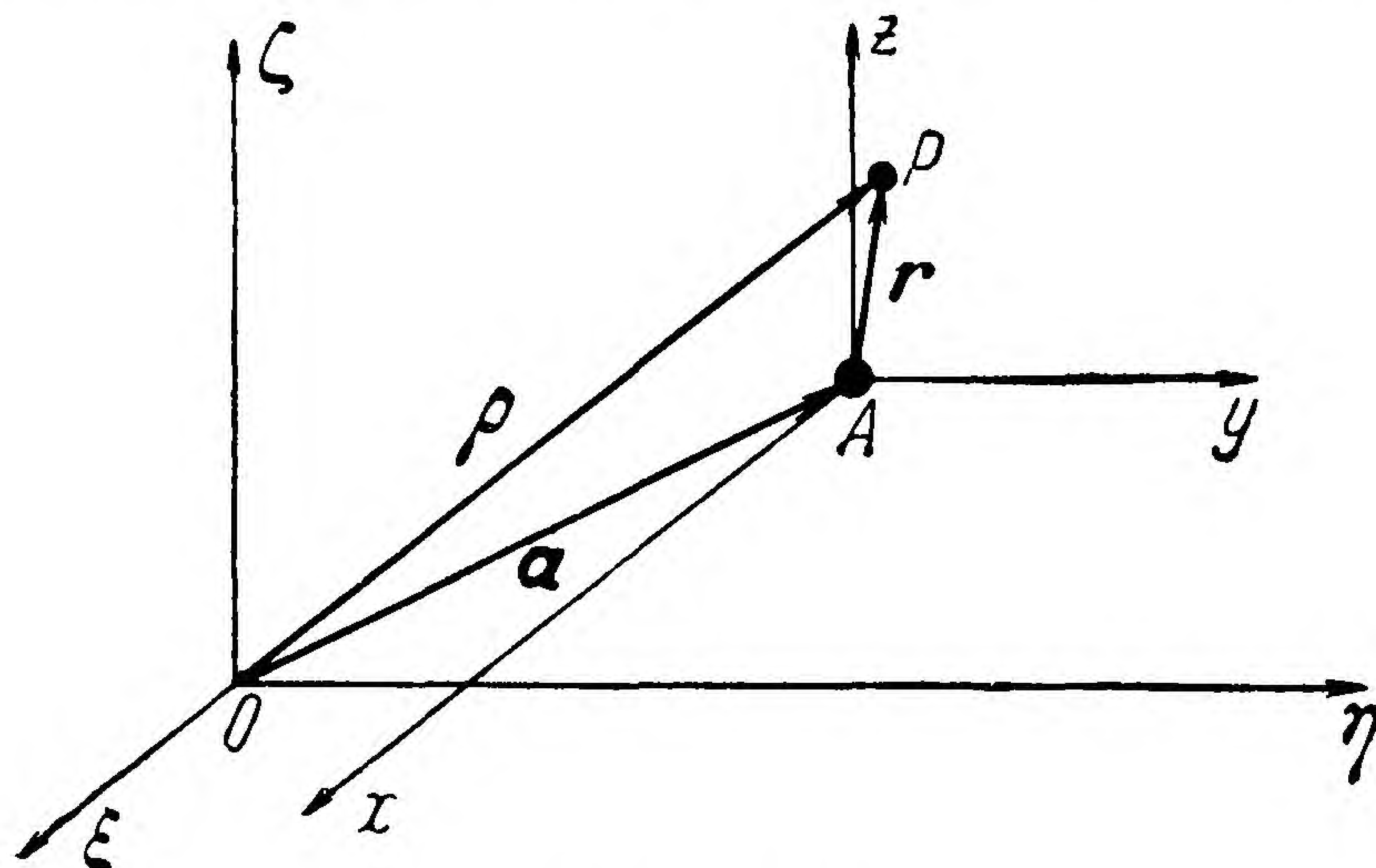


Рис. 2.3.

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Поэтому

$$m\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r},$$

то есть

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -f\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}. \qquad (5)$$

Точка, (A, M) сдвигается относительно инерциальной системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ благодаря силе $\boldsymbol{F}_1 = f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$. Поэтому $M\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$, так что

$$\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = f\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}. \qquad (6)$$

Но $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$, так что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r}. \qquad (7)$$

Число

$$K = f(M+m) \qquad (8)$$

назовем *гравитационным параметром пары материальных точек* (A, M) *и* (P, m). Таким образом, движение спутника относительно притягивающего центра определяется уравнением

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0. \qquad (9)$$

Бросается в глаза внешнее сходство дифференциальных уравнений общей задачи двух тел и ограниченной задачи

двух тел; только K имеет в этих уравнениях различный смысл.

Сравнивая формулы (2) и (8) для K, убедимся в том, что притягивающий спутник с массой m движется относительно центрального тела с массой M точно так же, как двигался бы непритягивающий спутник вокруг центрального тела с массой $M + m$.

Заметим, что векторное уравнение (9) равносильно трем скалярным уравнениям для декартовых координат спутника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K\frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + K\frac{y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + K\frac{z}{r^3} = 0, \tag{10}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{11}$$

В дальнейшем нам предстоит из формул (8) и (9) вывести важные для практики свойства движения спутника: законы Кеплера, уравнение орбиты спутника, зависимость положения спутника на этой орбите от времени.

Задачи

1. По данным непосредственных измерений ускорение силы тяжести составляет на экваторе $g_э = 9{,}7805$ *м/сек*^{2} (в силу тяжести включается центробежная сила). Экваториальный радиус Земли $R_э = 6378{,}150$ *км*. По этим данным вычислите гравитационный параметр Земли $K_З$.

2. Масса Юпитера составляет $\frac{1}{1047{,}4}$ от массы Солнца, масса Земли — $\frac{1}{332400}$ от массы Солнца. Считая известным гравитационный параметр Земли $K_З$, подсчитайте гравитационный параметр Юпитера $K_Ю$.

§ 2. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ. ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

1. Покажем, что *движение спутника относительно притягивающего центра все время происходит в одной и той же плоскости, проходящей через притягивающий центр.*

Радиус-вектор спутника $\boldsymbol{r}$ и его скорость $\boldsymbol{v}$ являются функциями времени; пусть в момент t_0 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$. Возможны два случая: 1) векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ неколлинеарны

(то есть не лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых); 2) эти векторы коллинеарны.

Случай 1. Умножая равенство (2.1.9) *) векторно на $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}).$$

Так как

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},$$

то

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] = 0, \text{ или } \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}] = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — постоянный вектор. Полагая $t = t_0$, найдем, что

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0. \tag{2}$$

Умножая (1) почленно на $\boldsymbol{r}$ скалярно, получим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r} = 0. \tag{3}$$

Итак, в любой момент вектор $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор спутника) перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. А это значит, что в любой момент времени вектор $\boldsymbol{r}$ лежит в той плоскости (α), которая проходит через притягивающий центр и перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{\sigma}$.

Случай 2. В этом случае также справедливы формулы (1) и (2), но $\boldsymbol{\sigma} = 0$, ибо $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ коллинеарны, и не имеет смысла говорить о какой-то определенной плоскости (α), перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Интуитивно очевидно, что в данном случае спутник движется прямолинейно. Докажем это *строго*. В данном случае

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \equiv 0. \tag{4}$$

Обозначим орт вектора $\boldsymbol{r}$ через $\boldsymbol{p}$, его длину через r, так что

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{p}. \tag{5}$$

---

*) Как мы договорились в предисловии, это означает: глава II, § 1, формула (9).

Дифференцируя $\boldsymbol{r}$ по t, получим

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{p} + r\dot{\boldsymbol{p}}. \tag{6}$$

Но

$$\boldsymbol{p}^2 \equiv 1. \tag{7}$$

Дифференцируя это тождество, получим

$$\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} = 0. \tag{8}$$

Умножая почленно (векторно) равенства (5) и (6) и учитывая (4), найдем

$$r^2 (\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}}) = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени не было столкновения спутника с центральным телом, то $r \neq 0$ и поэтому

$$\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}} = 0. \tag{9}$$

Используя векторное тождество $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$, получим

$$(\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}})^2 = \boldsymbol{p}^2\cdot\dot{\boldsymbol{p}}^2 - (\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}})^2.$$

Учитывая (7), (8) и (9), найдем, что $\dot{\boldsymbol{p}} \equiv 0$, то есть $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Итак, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{c}$, а это и означает, что движение спутника прямолинейное.

2. Формула (1) выражает некоторую зависимость между радиусом-вектором и скоростью спутника. Эту зависимость называют *векторным интегралом площадей* *). Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ называется *векторной константой площадей*.

Пусть (x, y, z) — координаты точки P в некоторой прямоугольной системе координат (с началом в точке A и с осями, постоянно ориентированными в пространстве), $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты (единичные векторы) осей координат Ax, Ay, Az, а σ_1, σ_2, σ_3 — проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}$ на эти оси. Тогда

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1\boldsymbol{i} + \sigma_2\boldsymbol{j} + \sigma_3\boldsymbol{k}.$$

*) Ниже это название будет оправдано.

Так как $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \sigma_1 \boldsymbol{i} + \sigma_2 \boldsymbol{j} + \sigma_3 \boldsymbol{k}$, то векторный интеграл площадей (1) переписывается в координатах следующим образом:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = \sigma_1, \; z\dot{x} - x\dot{z} = \sigma_2, \; x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma_3. \qquad (10)$$

Уравнение плоскости движения спутника (3) можно записать теперь в более привычной для нас координатной форме:

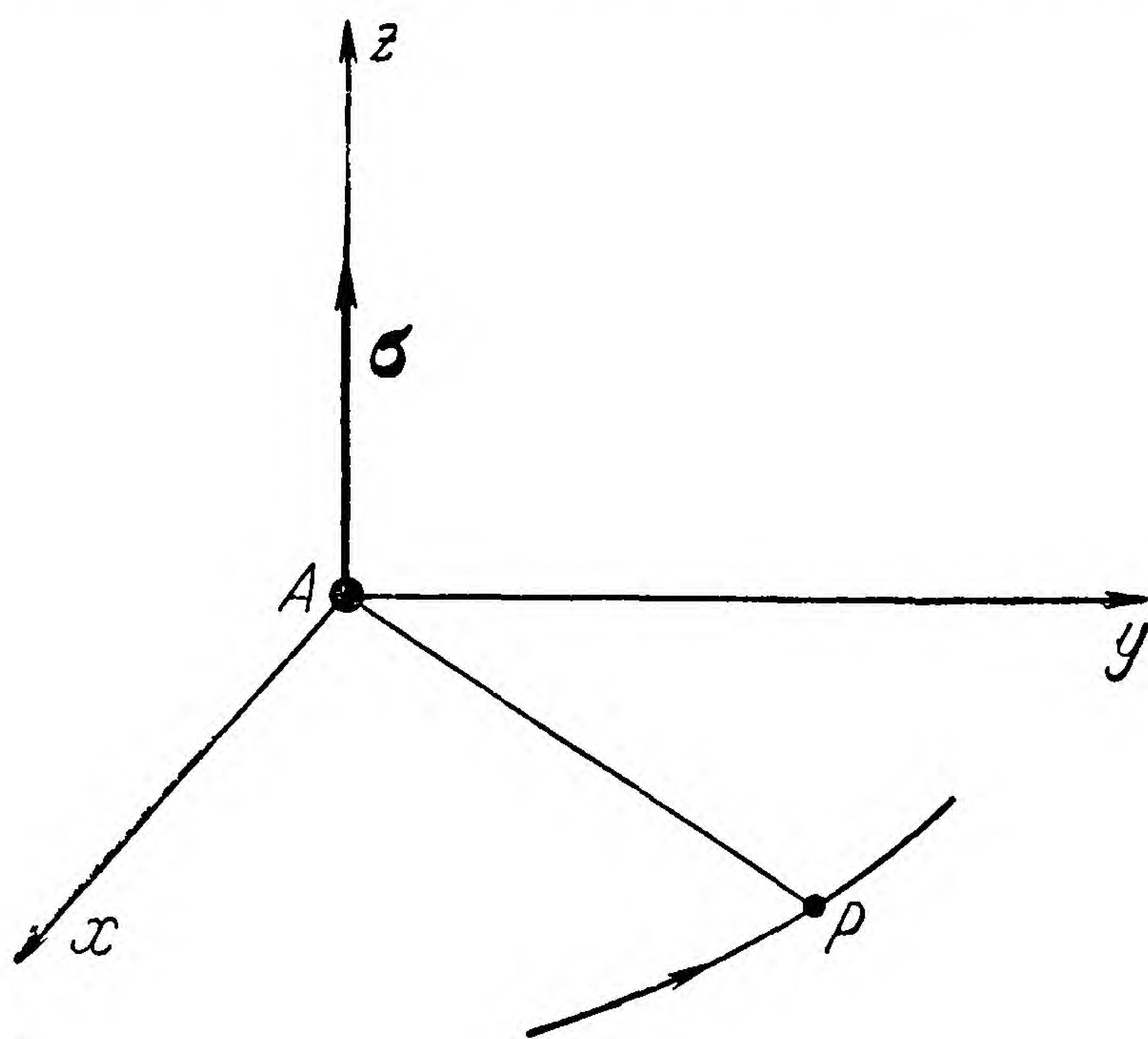


Рис. 2.4.

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0. \qquad (11)$$

Введем специальную прямоугольную систему координат, совмещая плоскость Axy с плоскостью орбиты и располагая тройку осей Ax, Ay, Az таким образом, чтобы она образовала правоориентированную систему (рис. 2.4). Тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; обозначим в этом случае σ_3 через σ. Число σ называют *скалярной константой площадей* (или, короче, константой площадей). Ясно, что

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \boldsymbol{k}, \; \sigma = \pm |\boldsymbol{\sigma}|. \qquad (12)$$

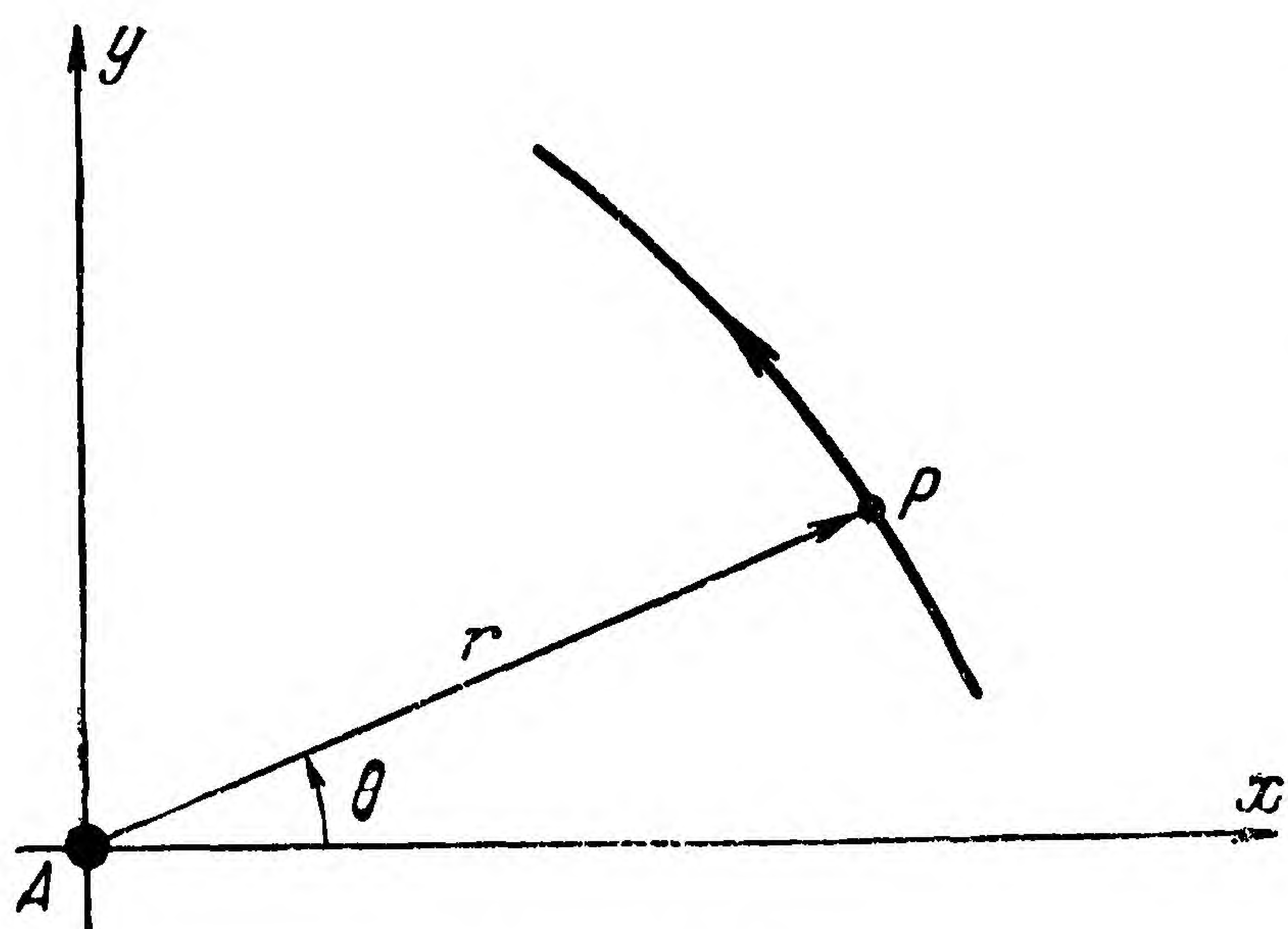


Рис. 2.5.

Так как в этом случае при любом положении спутника $z \equiv 0$, $\dot{z} \equiv 0$, то система (10) сводится к равенству

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \qquad (13)$$

Переходя к полярным координатам (рис. 2.5) по формулам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, получим

$$r^2\dot{\theta} = \sigma. \qquad (14)$$

Это — *полярная форма интеграла площадей*. Из формулы (14) вытекает несколько важных выводов.

1. Если $\sigma > 0$, то $\dot{\theta} > 0$ (в любой момент времени t). А это значит, что угол θ наклона радиуса-вектора спутника и оси Ax постоянно растет; движение спутника все время происходит в положительном направлении, «против часовой стрелки» (с точки зрения наблюдателя, помещенного на положительном луче оси Az). Аналогично, если $\sigma < 0$, то $\dot{\theta} < 0$, то есть спутник все время движется в отрицательном направлении, «по часовой стрелке». При $\sigma > 0$ движение спутника называется *прямым*, при $\sigma < 0$ — *обратным*.

Примем в дальнейшем, что при $\sigma \neq 0$ *направление осей выбрано таким образом, чтобы движение было прямым*; иначе говоря, ось Az выбрана так, что она одинаково направлена с вектором $\boldsymbol{\sigma}$. При этом условии скалярная константа площадей σ выражается через компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$ (в любой прямоугольной системе координат) по формуле

$$\sigma = |\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \qquad (15)$$

2. Интеграл площадей (14) запишем так: $\dot{\theta} = \sigma/r^2$. Отсюда видно, что *чем дальше спутник от притягивающего центра, тем меньше угловая скорость спутника* (то есть тем медленнее вращается его радиус-вектор вокруг притягивающего центра).

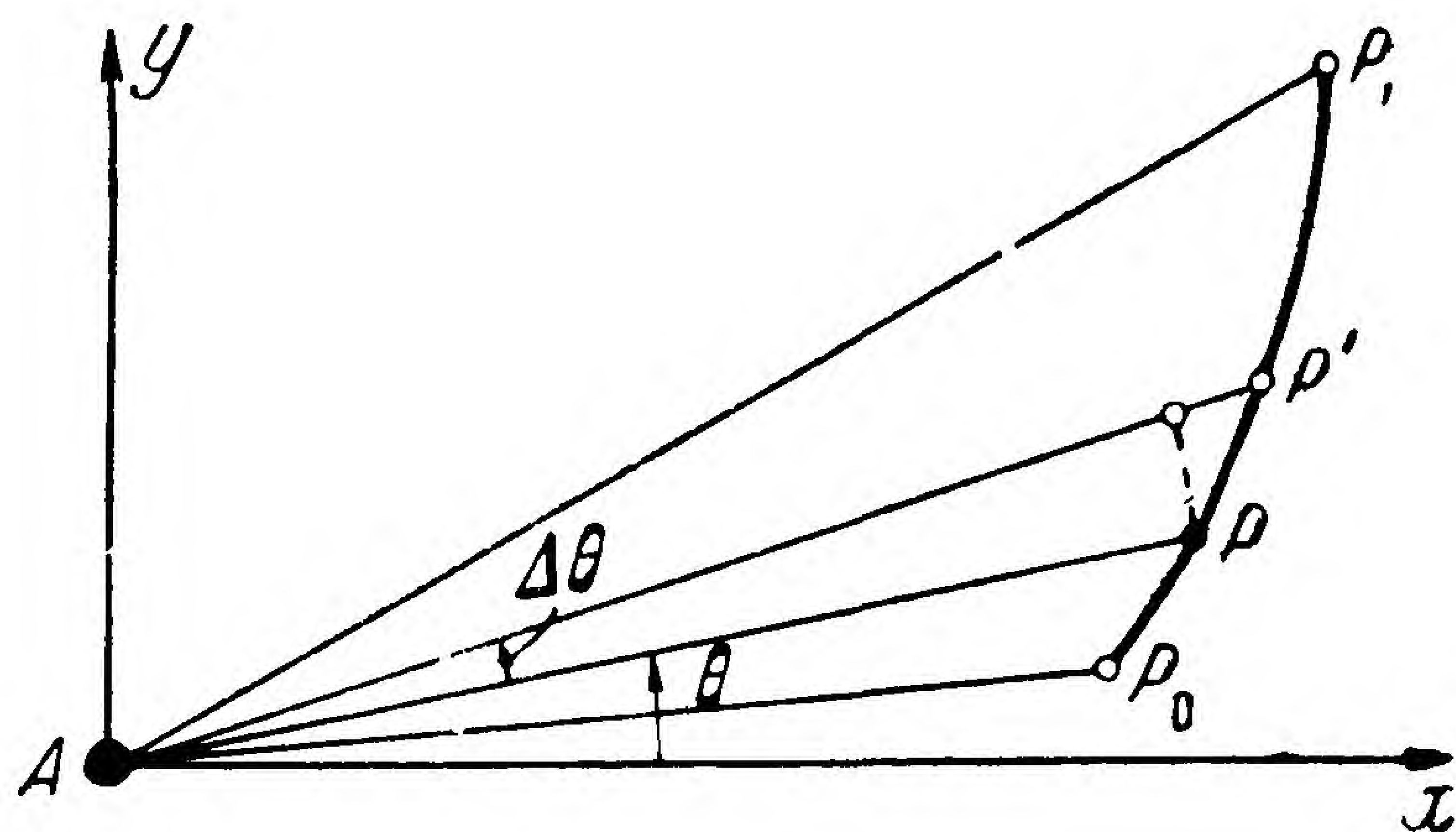


Рис. 2.6.

Проиллюстрируем это таким примером. В январе Земля ближе к Солнцу, чем в июле. Поэтому в январе Земля движется вокруг Солнца с большей угловой скоростью, чем в июле (около 61′10″ в сутки 1 января, около 57′11″ в сутки 1 июля).

3. Интеграл площадей (14) имеет простой физический смысл. Пусть спутник в моменты t и $t + \Delta t$ занимал положения P и P' (рис. 2.6). Между моментами t и $t + \Delta t$ радиус-вектор спутника успел описать некоторый угол $\Delta\theta$ и «замести» некоторую площадь ΔS. С точностью до

бесконечно малых величин порядка выше первого относительно $\Delta\theta$ площадь заметенного сектора ΔS равна $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$, откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ найдем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \qquad (16)$$

Величину dS/dt называют в механике *секториальной скоростью* точки P относительно точки A. Из формулы (14) следует, что

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sigma = \text{const}. \qquad (17)$$

Таким образом, *интеграл площадей означает, что секториальная скорость спутника относительно притягивающего центра постоянна.*

Пусть за промежуток времени от момента t_0 до момента t_1 спутник описал дугу P_0P_1 (рис. 2.6), а радиус-вектор спутника успел замести криволинейный сектор P_0AP_1, площадь которого обозначим через S. Интегрируя уравнение (17) в пределах от t_0 до t_1, получим

$$S = \frac{1}{2}\sigma(t_1 - t_0). \qquad (18)$$

Эта формула выражает *второй закон Кеплера*:

Площадь, заметенная радиусом-вектором спутника, пропорциональна времени, в течение которого она заметена.

Иногда этот закон формулируют несколько иначе: *за равные промежутки времени радиус-вектор спутника заметает равные площади.*

Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки P можно разложить на две составляющие: на радиальную составляющую $\boldsymbol{v}_r$, направленную по прямой AP, и поперечную (трансверсальную) составляющую $\boldsymbol{v}_n$, направленную по прямой PN, нормальной к радиусу-вектору AP (рис. 2.7). В курсах механики устанавливается, что величины этих скоростей определяются по формулам

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}. \qquad (19)$$

Поэтому формулу (14) можно переписать и так:

$$rv_n = \sigma. \tag{20}$$

Пусть φ — угол между радиусом-вектором спутника и вектором его скорости. Тогда $v_n = v \sin \varphi$, где v — абсолютная величина скорости спутника. Формула (14) принимает вид

$$rv \sin \varphi = \sigma = \text{const}. \tag{21}$$

Таким образом, интеграл площадей может быть представлен в нескольких эквивалентных формах. Каждая из этих форм представляет собой аналитическое выражение второго закона Кеплера.

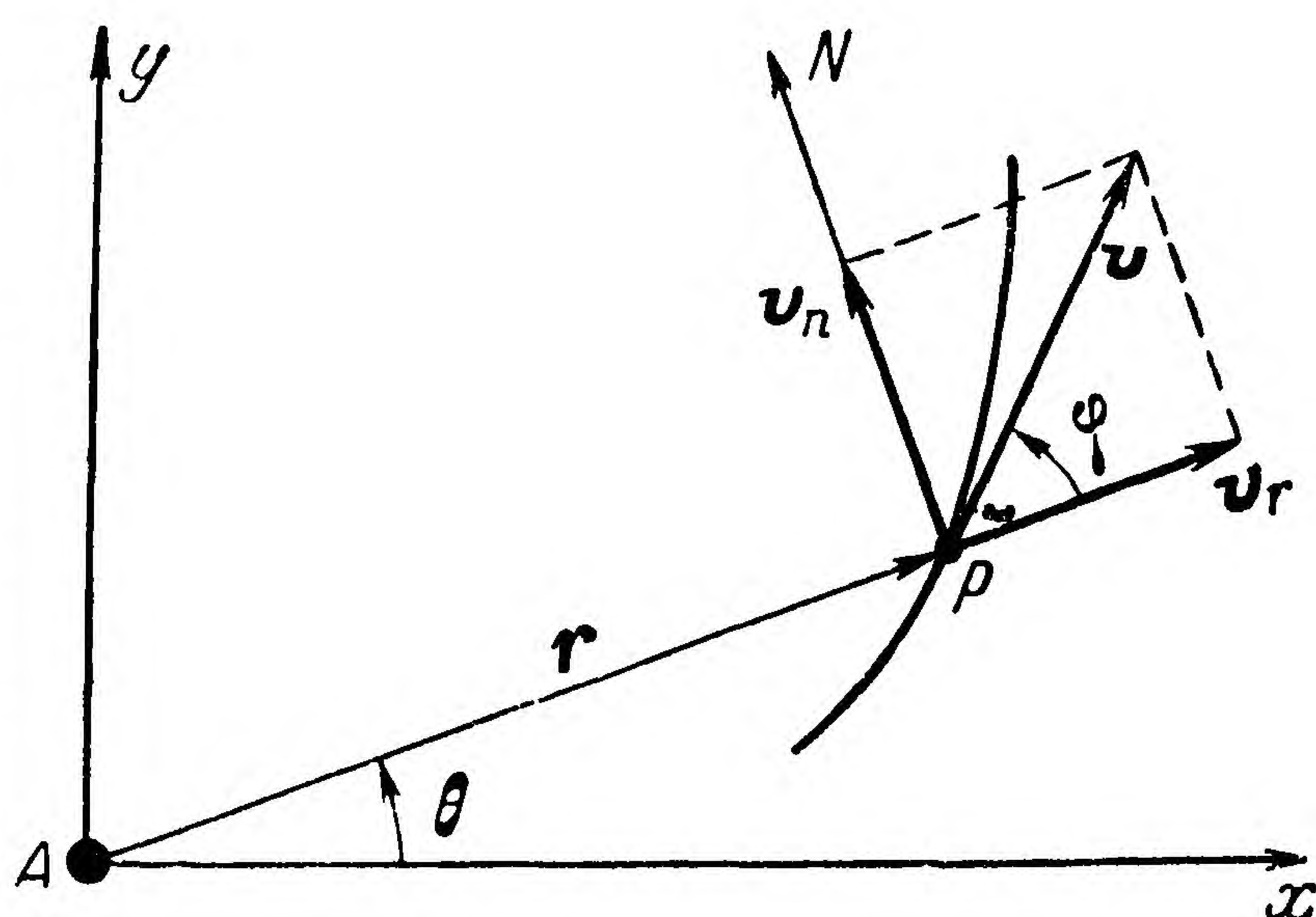


Рис. 2.7.

3. В наших рассуждениях мы исходили из того, что сила притяжения спутника к притягивающему центру определяется по формуле вида $F = fMm/r^2$. В истории механики высказывалось мнение, что эта формула может быть уточнена. Однако каким бы ни был закон непрерывного изменения силы, действующей на спутник и проходящей в каждый момент времени через притягивающий центр, все равно движение спутника будет плоским и будет верен интеграл площадей. Это становится ясным, если заметить, что после замены в формуле (2.1.9) выражения $\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r}$ любой функцией вида $K(x, y, z)\,\boldsymbol{r}$ из (2.1.9) по-прежнему будет вытекать интеграл площадей (1).

В будущем, при определенных режимах работы двигателя космического корабля в окрестности какой-либо звезды (или планеты, или крупного спутника планеты) его тяга может оказаться в течение некоторого времени направленной по прямой, соединяющей корабль с притягивающим центром. В течение этого промежутка времени — как бы ни менялась тяга двигателя по величине — движение спутника будет подчиняться второму закону Кеплера.

§ 3. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

Умножая уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad (1)$$

скалярно на $2\dot{\boldsymbol{r}}$, получим:

$$2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{2K}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2).$$

Но

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v},\ \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \boldsymbol{v}^2 = v^2,\ \boldsymbol{r}^2 = r^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2) = -\frac{K}{r^3}2r\frac{dr}{dt} = 2K\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{r}\right);$$

откуда

$$v^2 - \frac{2K}{r} = h, \qquad (2)$$

где h — некоторая константа (ее называют *константой энергии*). Формула (2) носит название *интеграла энергии* (или интеграла живых сил). Для объяснения этого названия перепишем ее так:

$$\frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mK}{r}\right) = \frac{mh}{2}.$$

Слагаемое $mv^2/2$ — это кинетическая энергия («живая сила») спутника,— mK/r — его потенциальная энергия (см. главу I, § 1). Формула показывает, что *полная энергия спутника* (то есть сумма его кинетической и потенциальной энергии) в *течение всего времени его движения остается постоянной*.

Константу h можно найти из начальных условий: если в какой-то момент t_0 расстояние спутника от притягивающего центра равно r_0 и абсолютная величина скорости равна v_0, то

$$h = v_0^2 - \frac{2K}{r_0}.$$

Выведем из интеграла энергии простейшие следствия.

1) При удалении спутника от притягивающего центра скорость спутника уменьшается (притягивающий центр тормозит спутник); при приближении спутника к притягивающему центру скорость спутника возрастает (притягивающий центр разгоняет спутник).

Действительно, из (2) видно, что при возрастании r скорость v убывает и, наоборот, при убывании r v возрастает.

2) Пусть спутник в своем движении может удаляться от притягивающего центра неограниченно далеко. Из формулы (2) видно, что при $r \to \infty$ величина скорости будет приближаться к некоторому пределу (v_∞), причем $v_\infty^2 = h$. (Заметим, что этот предельный переход возможен лишь при $h \geqslant 0$.)

Число v_∞ назовем *величиной скорости на бесконечности*.

Итак, в случае $h \geqslant 0$ константа h равна квадрату скорости спутника на бесконечности.

Задачи

1. С поверхности планеты вертикально вверх должна быть запущена высотная ракета-зонд. Планету допустимо рассматривать как шар радиуса R со сферическим распределением плотности. Сопротивлением атмосферы можно пренебречь. Ускорение силы тяжести на поверхности планеты равно g. Какую начальную скорость v_0 у поверхности планеты необходимо сообщить ракете, чтобы она поднялась на высоту H над поверхностью планеты? Получить приближенные формулы для v_0:

а) когда H мало $\left(\frac{H}{R} \to 0\right)$;

б) когда H велико $\left(\frac{H}{R} \to \infty\right)$.

2. Вторая советская космическая ракета, попавшая на Луну 4 сентября 1959 года, имела на расстоянии 320 000 *км* от центра Земли скорость 2,31 *км/сек*. Какую скорость имела она на расстоянии 230 *км* от поверхности Земли?

§ 4. ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА

Будем исходить из полученных ранее соотношений

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

(дифференциальное уравнение движения спутника) и

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

(интеграл площадей). Перемножим равенства (1) и (2):

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}, \text{ или } \boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}).$$

Преобразуя правую часть при помощи известного векторного тождества

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

получим:

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{K}{r^3}[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})].$$

Но $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = r^2$, откуда $\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{r}$. Поэтому

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}(r^2\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\cdot r\cdot\dot{r}) =$$

$$= -K\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot r - \boldsymbol{r}\cdot\dot{r}}{r^2} = -K\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + K\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{v} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторый постоянный вектор.

Равенство (3) носит название векторного *интеграла Лапласа*. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ называют *вектором Лапласа*.

Покажем, что *вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей*, то есть что $\boldsymbol{\sigma} \perp \boldsymbol{\lambda}$ или, иначе говоря,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{4}$$

Действительно, так как вектор $\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\sigma}$, то из интеграла Лапласа (3) получим

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{r}}) + \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}).$$

Отсюда, на основании (2.2.3), $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$. Последнее равенство, очевидно, означает, что при любом выборе прямоугольной системы координат между тремя компонентами вектора Лапласа (λ_1, λ_2, λ_3) и тремя компонентами векторной константы площадей (σ_1, σ_2, σ_3) существует такая зависимость:

$$\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3 = 0. \qquad (5)$$

Так как вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ортогонален плоскости орбиты спутника, то перпендикулярный к нему *вектор Лапласа всегда лежит в плоскости этой орбиты.*

Задачи

1. Запишите векторный интеграл Лапласа в координатной форме.
2. Докажите справедливость следующего соотношения:

$$\lambda^2 = K^2 + h\sigma^2, \qquad (6)$$

связывающего константы трех интегралов задачи двух тел.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ОРБИТЫ СПУТНИКА

При помощи интеграла площадей и интеграла Лапласа можно получить уравнение орбиты спутника.

Перепишем эти интегралы:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}. \qquad (2)$$

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Тогда из (2)

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{\lambda}}{K}r,$$

а это и есть уравнение прямолинейной орбиты.

Пусть теперь $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$. Умножая обе части интеграла Лапласа (2) скалярно на вектор $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v})+\frac{K}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r},$$

или

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})+\frac{K}{r}r^2=-\lambda r\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{r}$. Воспользовавшись теперь интегралом площадей (1), найдем

$$r(K+\lambda\cos\theta)=\sigma^2.$$

Отсюда видно, что при $\sigma \neq 0$ $K+\lambda\cos\theta\neq 0$ и поэтому

$$r=\frac{\sigma^2}{K+\lambda\cos\theta},$$

то есть

$$r=\frac{\sigma^2/K}{1+(\lambda/K)\cos\theta}. \tag{3}$$

Положим

$$p=\frac{\sigma^2}{K}, \qquad \varepsilon=\frac{\lambda}{K}. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}. \tag{5}$$

Это и есть *уравнение орбиты спутника* (при $\sigma\neq 0$).

В аналитической геометрии *) устанавливается, что (5) есть уравнение конического сечения в полярных координатах с полюсом в фокусе (рис. 2.8). Фокальный параметр этого конического сечения равен p, а эксцентриситет ра-

*) Для справок относительно терминов и формул из теории конических сечений можно, например, обратиться к справочникам по высшей математике М. Я. Выгодского или И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева.

вен ε. Угол θ также имеет простой смысл — это угол между осью симметрии конического сечения и радиусом-вектором спутника. Мы приходим к следующему выводу, выражающему *первый закон Кеплера*:

Движение спутника относительно притягивающего центра всегда совершается по коническому сечению (по эллипсу, гиперболе, параболе или прямой), причем в одном из фокусов этого конического сечения находится притягивающий центр (рис. 2.9—2.11).

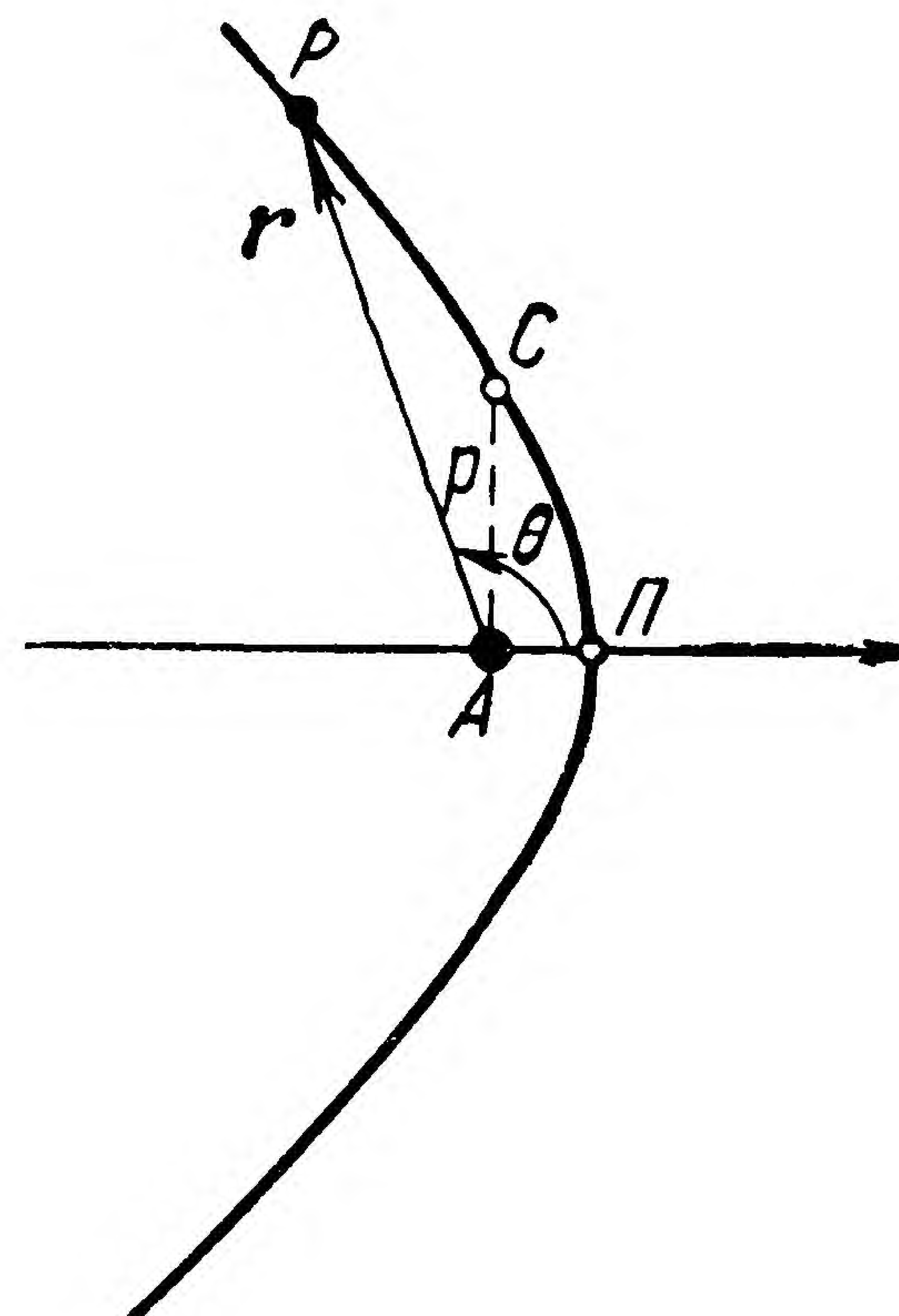


Рис. 2.8.

Из (2.4.6) и (4) следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \qquad (6)$$

Таким образом, зная константы K, σ, h (гравитационный параметр притягивающего центра, скалярную константу площадей и константу энергии), легко вычислить эксцентриситет ε орбиты, а также ее фокальный

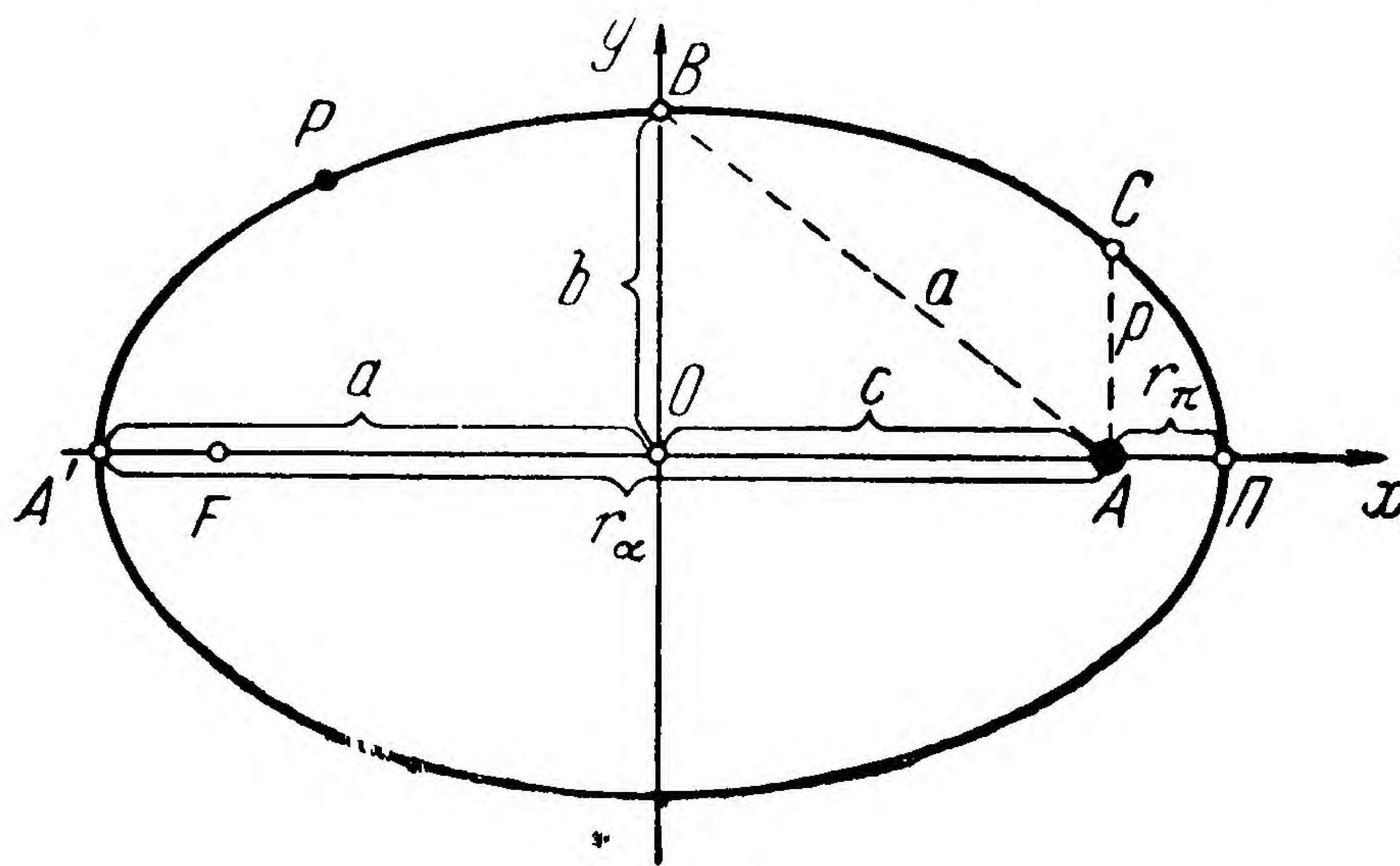


Рис. 2.9.

параметр p [по первой формуле (4)]. А эти два числа полностью определяют форму и размеры орбиты (но, разумеется, не положение ее в пространстве). Из (5) следует, что r принимает наименьшее значение при $\theta = 0$:

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}. \qquad (7)$$

Ближайшая к притягивающему центру точка *П* орбиты спутника называется *перицентром*. Расстояние перицентра от притягивающего центра можно найти по формуле (7). *Линией* (или осью) *апсид орбиты спутника* называется ось, проходящая через притягивающий центр *А* и перицентр *П* в направлении от *А* к *П*. Направления оси апсид и вектора Лапласа совпадают. Линия апсид служит, очевидно, осью симметрии орбиты.

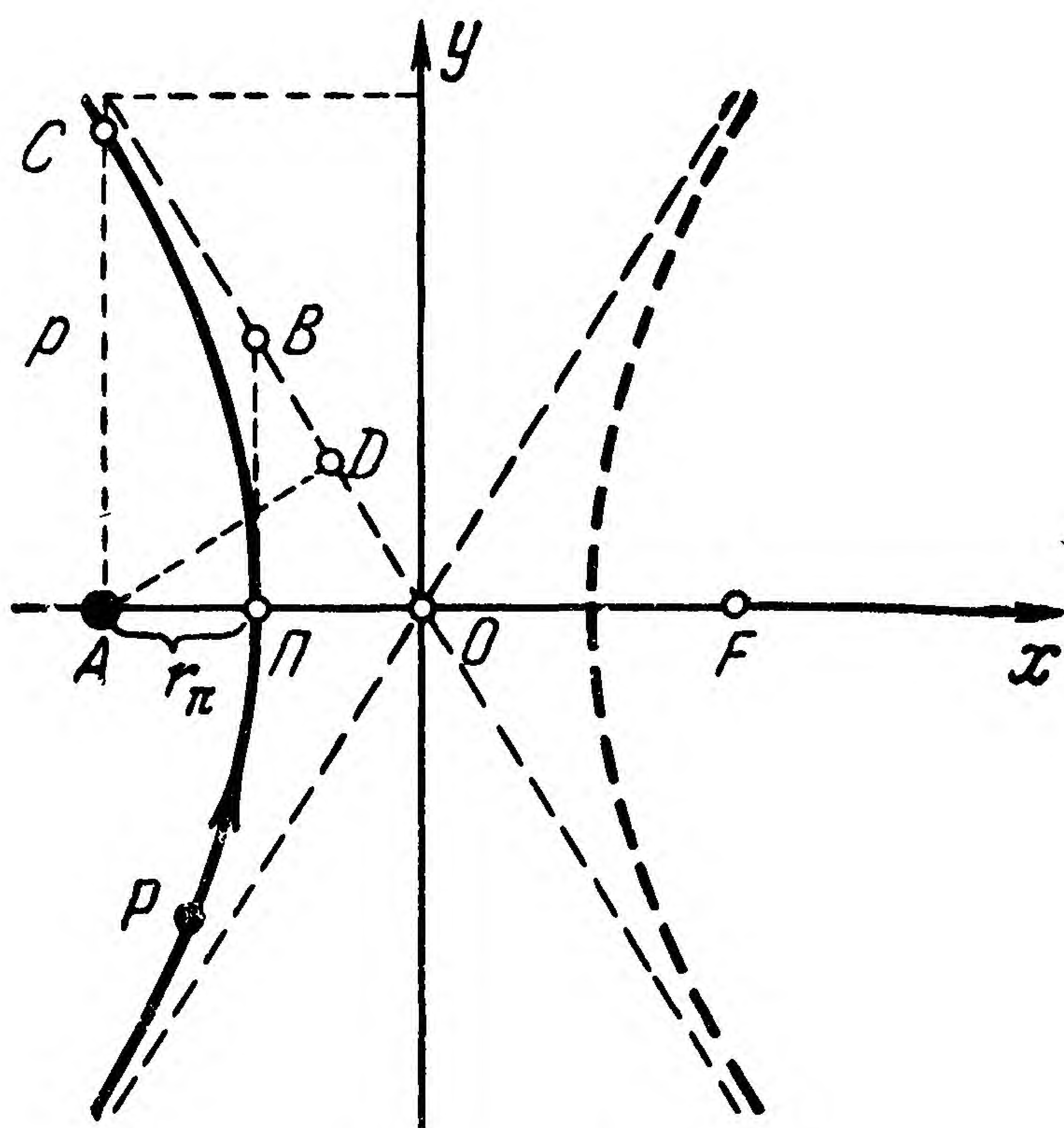


Рис. 2.10.

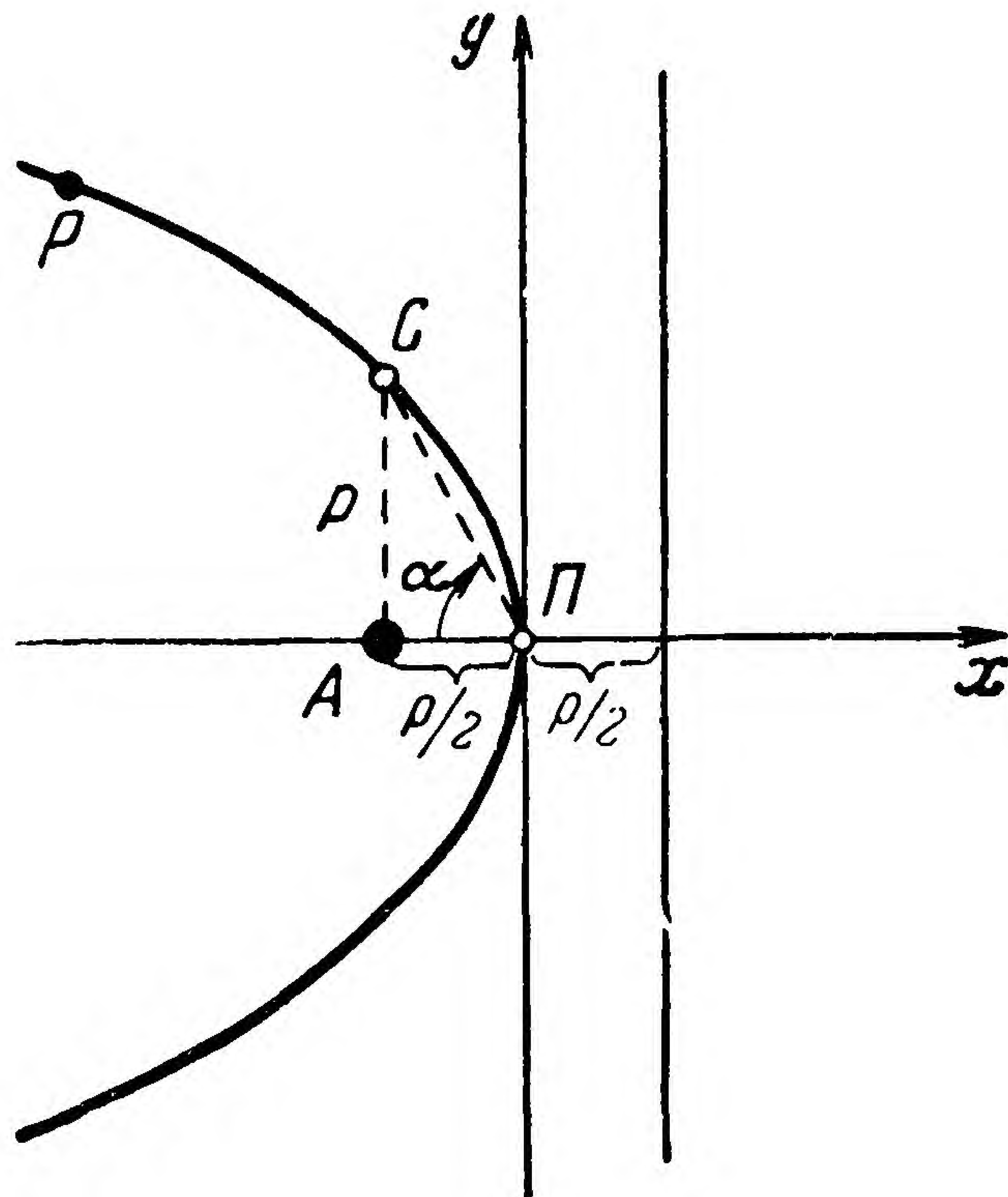


Рис. 2.11.

В случае, когда $0 < \varepsilon < 1$ (орбита является эллипсом), знаменатель в формуле (5) будет при любом θ неотрицательным числом. Свое наименьшее значение этот знаменатель принимает тогда, когда $\cos\theta = -1$, то есть когда $\theta = \pi$. В таком случае r принимает свое *наибольшее* значение. Это максимальное удаление r_α спутника от притягивающего центра определяется по формуле

$$r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Точка A' эллиптической орбиты, наиболее удаленная от притягивающего центра, называется *апоцентром* орбиты спутника. Очевидно, что три точки A', A, $П$ всегда лежат на одной прямой. Перицентр и апоцентр спутника Земли обычно называют перигеем и апогеем, перицентр и апо-

центр спутника Солнца — перигелием и афелием, перицентр и апоцентр спутника звезды — периастром и апоастром. Аналогичные названия иногда вводятся и при рассмотрении спутников других небесных тел. Апоцентр и перицентр называют также апсидами орбиты. Среднее арифметическое расстояний от этих двух точек до притягивающего центра, то есть $\frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi)$, называется *средним расстоянием спутника* от притягивающего центра. Оно, очевидно, равно большой полуоси орбиты спутника *):

$$\frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi) = a.$$

Угол θ между линией апсид и радиусом-вектором спутника AP называется *истинной аномалией* спутника в данный момент времени. Этот угол отсчитывается в положительном направлении от линии апсид (то есть от луча $A\Pi$).

Форма и размеры эллиптической орбиты вполне определяются любыми двумя из следующих параметров: p, ε, a, b, c, r_α, r_π и т. п. Если известны два из этих параметров, то по формулам аналитической геометрии можно найти все остальные. Чаще всего используются следующие зависимости:

$$b^2 + c^2 = a^2,\ b = a\sqrt{1-\varepsilon^2},$$
$$p = b^2/a,\ p = a(1-\varepsilon^2).$$

---

*) Большая полуось a является еще в одном смысле *средним* расстоянием спутника от притягивающего центра: если разделить всю орбиту на m равных дуг, каждую точку деления соединить с притягивающим центром, вычислить среднее арифметическое этих расстояний ρ_m и перейти затем к пределу при $m \to \infty$, то предел («среднедуговое расстояние спутника от притягивающего центра») как раз и будет равен a. Можно себе представить и другие способы образования «средних расстояний спутника P от притягивающего центра». Например, можно разделить полный угол, описываемый радиусом-вектором спутника за один оборот вокруг притягивающего центра A, на m равных углов лучами, исходящими из A, найти среднее арифметическое расстояний спутника от A до точек деления и перейти к пределу при $m \to \infty$. Таким образом, найденное среднеугловое расстояние оказывается равным *малой полуоси* орбиты b. Аналогичным образом можно определить «средневременное расстояние спутника от притягивающего центра» — оно оказывается равным $a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$.

Аналогично обстоит дело и с гиперболической или параболической орбитой *).

П р и м е р. В первые дни после запуска первого советского спутника (4 октября 1957 года) наибольшая высота спутника над поверхностью Земли составляла $H_\alpha = 948$ *км*, наименьшая — $H_\pi = 228$ *км*. Считая Землю шаром радиуса $R = 6371$ *км*, подсчитайте эксцентриситет орбиты этого спутника.

Р е ш е н и е. $r_\alpha = R + H_\alpha$, $r_\pi = R + H_\pi$. Но $r_\alpha = a + c$, $r_\pi = a - c$. Поэтому $2a = r_\alpha + r_\pi$, $2c = r_\alpha - r_\pi$, $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{H_\alpha - H_\pi}{2R + H_\alpha + H_\pi}$. Подставляя числовые данные, найдем $\varepsilon \approx 0{,}05$.

Задачи

1. Среднее расстояние Нептуна от Солнца $a_{\text{Н}}$ составляет 30,1 астрономических единиц [астрономическая единица (а. е.) — это среднее расстояние Земли от центра Солнца, а. е. $\approx 149{,}6 \cdot 10^6$ *км*]. Среднее расстояние Плутона от Солнца $a_{\text{Пл}}$ почти на 10 а. е. больше и составляет 39,5 а. е. Эксцентриситеты орбит Нептуна и Плутона равны соответственно: $\varepsilon_{\text{Н}} = 0{,}009$, $\varepsilon_{\text{Пл}} \approx 0{,}25$. Какая из этих двух планет ближе подходит к Солнцу — Нептун или Плутон?

2. Большая полуось орбиты Земли (при ее движении вокруг Солнца) равна $149{,}6 \cdot 10^6$ *км*, эксцентриситет этой орбиты — $1/_{60}$ (точнее, 0,01678). Вычислите наименьшее и наибольшее расстояния Земли до Солнца.

3. Над каким полушарием больше времени находился первый искусственный спутник Земли в течение первых его оборотов вокруг Земли — над северным или южным? Воспользуйтесь тем, что перигей спутника находился над какой-то точкой северного полушария.

4. Мы уже видели, что среднее арифметическое наибольшего и наименьшего расстояний спутника от притягивающего центра равно большой полуоси его орбиты. Покажите, что среднее геометрическое этих же расстояний r_α и r_π равно малой полуоси орбиты (b), а их среднее гармоническое — фокальному параметру орбиты (p) [средним гармоническим двух чисел x и y называется такое число z, что $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$].

---

*) Заметим, что при выполнении чертежей, необходимых при решении приведенных ниже задач, полезно иметь в виду следующее. Если орбита уже начерчена и требуется указать ее фокус A, то удобно воспользоваться:

а) в случае эллипса (рис. 2.9) — равенством $BA = O\Pi$;
б) в случае гиперболы (рис. 2.10) — равенством $\triangle OAD = \triangle OB\Pi$;
в) в случае параболы (рис. 2.11) — равенством $\operatorname{tg} \angle A\Pi C = 2$.

§ 6. СКОРОСТЬ СПУТНИКА И ЕЕ КОМПОНЕНТЫ

Форма и размеры непрямолинейной орбиты спутника вполне определяются заданием величин p и ε. Пусть нам известны эти величины и гравитационный параметр притягивающего центра (K). Если в какой-то момент времени еще известна истинная аномалия спутника, то можно вычислить и вектор скорости $\boldsymbol{v}$.

Как мы уже отмечали, вектор $\boldsymbol{v}$ можно разложить на две компоненты — радиальную $\boldsymbol{v}_r$ и поперечную $\boldsymbol{v}_n$ (рис. 2.12), причем величины этих компонент определяются по следующим формулам:

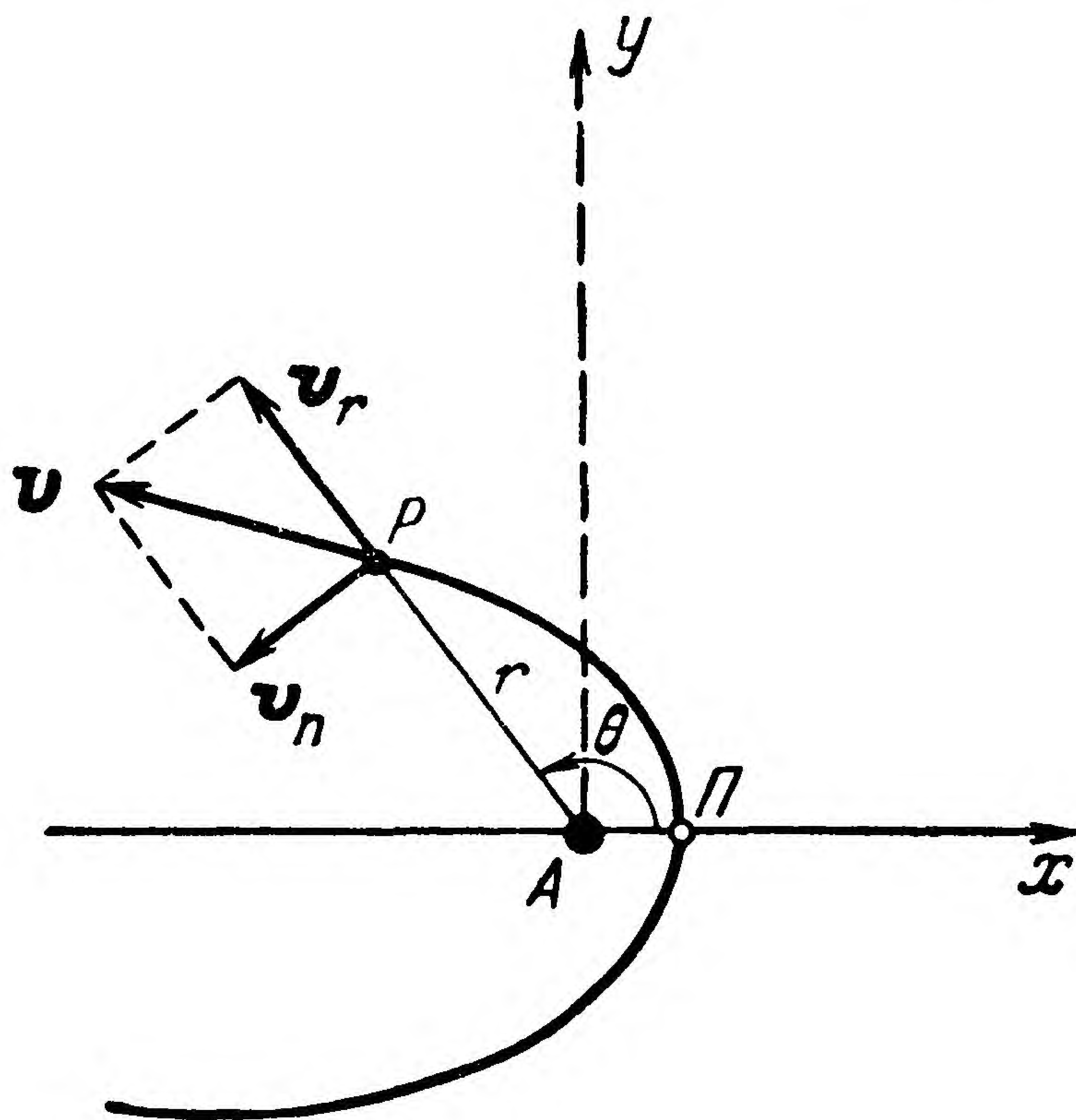


Рис. 2.12.

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}.$$

Но $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, $r^2\dot{\theta} = \sigma$. Отсюда имеем

$$v_r = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{p\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\frac{\sigma}{r^2}, \quad v_n = \frac{\sigma}{r}.$$

Воспользовавшись формулами (2.5.4) и (2.5.5), получим:

$$v_r = \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta = \frac{\sigma}{p}\,\varepsilon\sin\theta, \tag{1}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{K}{p}}\,(1+\varepsilon\cos\theta) = \frac{\sigma}{p}\,(1+\varepsilon\cos\theta). \tag{2}$$

Абсолютная величина скорости спутника $v = \sqrt{v_r^2 + v_n^2}$, то есть

$$v = \sqrt{\frac{K}{p}\,(1+\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\theta)}. \tag{3}$$

Из формул (1) — (3) вытекает несколько полезных следствий.

1) Из (1) видно, что в перицентре ($\theta=0$) скорость спутника направлена перпендикулярно к его радиусу-вектору (ибо $v_r=0$) и имеет *наибольшее* из возможных значений:

$$v_{\max}=v_\pi=\sqrt{\frac{K}{p}}(1+\varepsilon). \qquad (4)$$

2) В апоцентре (если орбита — эллипс) скорость спутника также направлена перпендикулярно к его радиусу-вектору и имеет *наименьшее* из возможных значений:

$$v_{\min}=v_\alpha=\sqrt{\frac{K}{p}}(1-\varepsilon). \qquad (5)$$

3) Если известны масса притягивающего центра, положение спутника относительно притягивающего центра и вектор скорости спутника в какой-то один момент времени, то по этим данным можно определить величину и форму орбиты. Это следует из того факта, что из трех уравнений (2.5.5), (1) и (2) по трем величинам r, v_r, v_n можно определить ε, p.

4) Правило рычага. В случае эллиптической орбиты скорости спутника в перицентре v_π и апоцентре v_α связаны с расстояниями этих точек от притягивающего центра (r_π и r_α) следующей простой зависимостью:

$$\frac{v_\pi}{v_\alpha}=\frac{r_\alpha}{r_\pi}. \qquad (6)$$

Иными словами, скорость спутника в перицентре во столько раз больше скорости спутника в апоцентре, во сколько раз расстояние перицентра от центра притяжения меньше расстояния апоцентра от того же центра притяжения.

Действительно, из рис. 2.9 видно, что

$$r_\alpha=a+c=a(1+\varepsilon),\ r_\pi=a-c=a(1-\varepsilon).$$

Из этих равенств и из (4) и (5) следует формула (6).

Формулу (6) иногда называют *правилом рычага*, ибо она допускает такую наглядно механическую иллюстрацию: если представить себе большую ось эллипса в виде рычага с опорой в точке A и к концам этого рычага A' и Π подвесить гири с весами, численно равными соответственно v_α и v_π, то весы окажутся в равновесии.

Задачи

1. Докажите правило рычага при помощи интеграла площадей.

2. Если космическая ракета на высоте 230 *км* над поверхностью Земли получит параллельно земной поверхности скорость 10 *км/сек*, то апогей ее орбиты окажется примерно на расстоянии 370 000 *км* от центра Земли. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

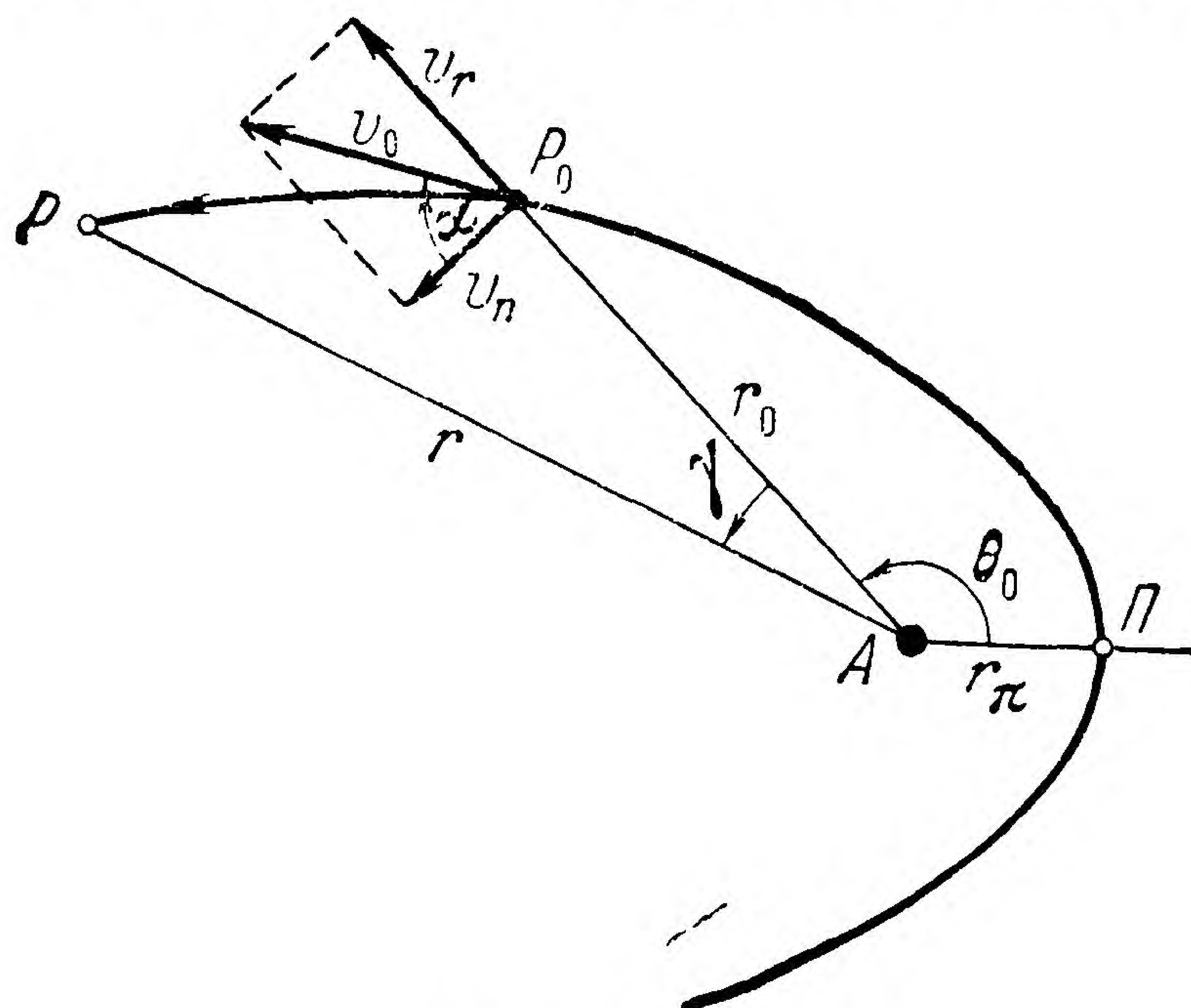


Рис. 2.13.

3. Космический корабль совершает перелет с выключенным двигателем в межпланетном пространстве на таких больших расстояниях от планет, что можно пренебречь их притяжением и учитывать только притяжение корабля к Солнцу. В некоторый («начальный») момент времени t_0, когда корабль находился в точке P_0 на расстоянии r_0 от Солнца, он имел скорость v_0, причем угол между вектором скорости корабля и его поперечной компонентой v_n был в этот момент равен α (рис. 2.13). Найдите истинную аномалию θ_0 корабля в рассматриваемый момент времени t_0, его расстояние от Солнца в момент прохождения через перигелий r_π, эксцентриситет ε и фокальный параметр p орбиты корабля.

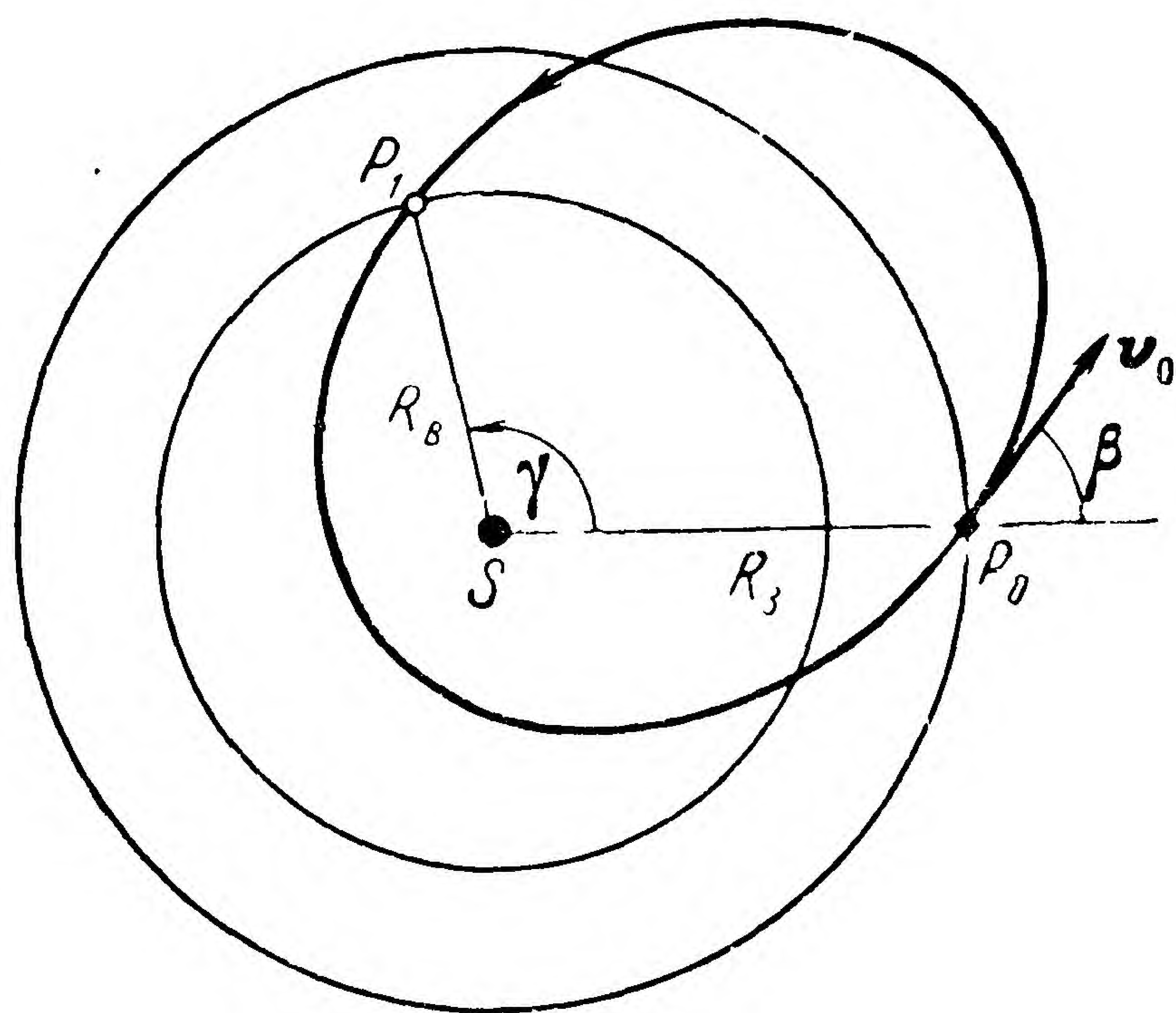


Рис. 2.14.

4. Космический корабль, о котором говорится в условии предыдущей задачи, через некоторое время пришел в точку P на расстоянии r от Солнца (рис. 2.13). За время перелета от P_0 до P радиус-вектор спутника описал угол γ. Для определенности будем полагать, что $0 < \gamma < \pi$. Получите формулы для вычисления угла γ.

5. Космический корабль находится в точке P_0 на орбите Земли. Он должен совершить перелет к орбите Венеры и пройти через заданную точку P_1 на этой орбите. Задана величина угла P_0SP_1 (γ). Примерный вид орбиты и направление полета корабля указаны на рис. 2.14. Каким должен быть угол β между радиусом-вектором корабля и вектором

его скорости $\boldsymbol{v}_0$ в точке P_0, если перелет должен быть совершен при минимальном значении скорости v_0? Вычислите эту минимальную скорость. Тяготением к Земле и Венере можно пренебречь. Расстояния SP_0 и SP_1 равны соответственно $R_З$ и $R_В$.

6. Решите предыдущую задачу в предположении, что

$$\gamma = 120°,\ R_З = 148\cdot 10^6\ км,\ R_В = 108\cdot 10^6\ км.$$

§ 7. ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА ОРБИТЫ СПУТНИКА ОТ ВЕЛИЧИНЫ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

1. Пусть в какой-то момент времени скорость спутника не коллинеарна его радиусу-вектору. В таком случае спутник будет двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе.

Покажем, что если известны лишь в один момент времени расстояние r_0 спутника от притягивающего центра и абсолютная величина скорости v_0, то уже можно сказать, каков будет характер орбиты (то есть будет ли она эллипсом, гиперболой или параболой). Воспользуемся ранее полученной формулой

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \tag{1}$$

Здесь

$$h = v_0^2 - 2K/r_0.$$

Как известно из аналитической геометрии, орбита будет эллипсом, когда $\varepsilon < 1$. Но $\varepsilon < 1$ тогда и только тогда, когда $h < 0$, то есть при условии

$$v_0^2 < \frac{2K}{r_0}. \tag{2}$$

Аналогично можно показать, что орбита спутника будет параболой в том и только том случае, когда $h = 0$, то есть если

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0}, \tag{3}$$

и гиперболой, если $h > 0$, то есть при условии

$$v_0^2 > \frac{2K}{r_0}. \tag{4}$$

2. Мы до сих пор предполагали, что скорость спутника не направлена по прямой, соединяющей притягивающий центр со спутником. *Случай прямолинейного движения* спутника можно рассматривать как предельный для эллиптического, параболического или гиперболического движения. Пусть в какой-то момент t_0 спутник занимает положение P_0 (рис. 2.15) и вектор скорости спутника имеет в этот момент такое же направление, как вектор $\overrightarrow{AP_0}$.

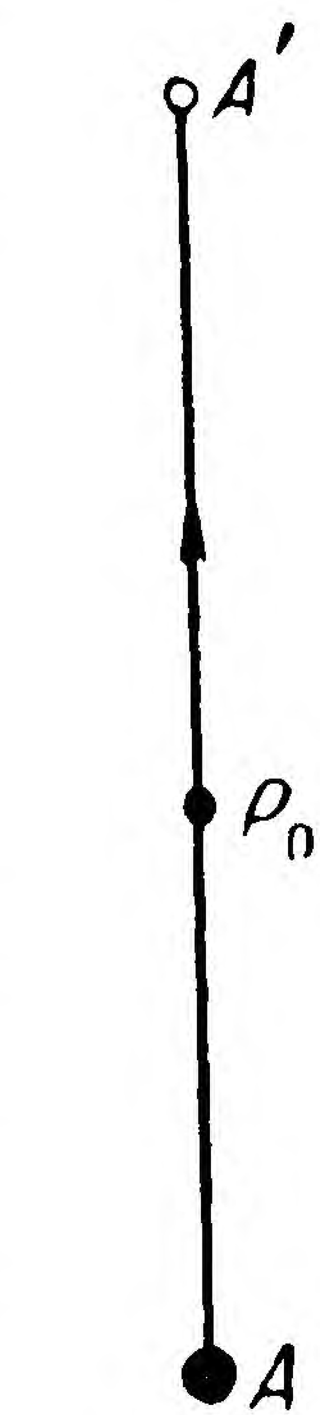


Рис. 2.15.

Если $v_0 < \sqrt{2K/r_0}$, то спутник, достигнув наибольшего удаления от притягивающего центра $r_\alpha = AA'$, начнет падать по прямой на притягивающий центр. Траектория спутника — сложенные вместе два отрезка P_0A' и $A'A$ одной и той же прямой. Отрезок AA' можно рассматривать как предельное положение дуги эллипса с фокусами A и A'. Такое положение получим при условии, что $p \to 0$.

Если $v_0 = \sqrt{2K/r_0}$, то спутник P будет описывать луч, неограниченно удаляясь вдоль прямой AP_0. Эту линию можно рассматривать как предельное положение дуги параболы. При неограниченном удалении от точки A скорость спутника будет иметь своим пределом нуль.

Аналогично, если $v_0 > \sqrt{2K/r_0}$, то спутник также будет описывать луч, неограниченно удаляясь от точки A. При этом скорость будет приближаться к некоторому пределу $v_\infty \neq 0$.

Говорят, что спутник имеет в данный момент времени эллиптическую, параболическую или гиперболическую скорость в зависимости от того, будет ли его скорость удовлетворять условию (2), (3) или (4).

3. Параболическую скорость можно определить как минимальную скорость, которую следует сообщить материальной точке для того, чтобы она могла удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от притягивающего

центра. На расстоянии r от притягивающего центра параболическая скорость равна

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2K}{r}}. \tag{5}$$

Независимо от того, в каком направлении материальная точка получит такую скорость, она будет удаляться неограниченно от притягивающего центра (если только не столкнется с ним).

При решении задачи о двух телах мы делали упрощающее допущение, что тяготением спутника ко всем телам, кроме одного (центрального тела), возможно пренебречь. Это на практике допустимо лишь в некоторой ограниченной области D пространства. Поэтому практически «удаление на сколь угодно большое расстояние от центрального тела» следует понимать как достижение границы этой области. Получив параболическую или гиперболическую скорость относительно притягивающего центра A, спутник через некоторое время должен подойти к границе той области D, внутри которой еще допустимо пренебречь влиянием на него других тел, кроме тела A.

Так, например, обстояло дело с первой советской космической ракетой, запущенной 2 января 1959 года в сторону Луны. Получив у поверхности Земли гиперболическую скорость, ракета через некоторое время вышла из той области пространства, где допустимо было пренебречь влиянием всех других тел, кроме Земли. Уже через несколько дней своего движения она вошла в область, где решающее влияние на движение ракеты оказывает воздействие Солнца и где тяготение к Земле ничтожно. В новом положении ее движение определяется с достаточной точностью притяжением опять-таки только одного, но уже другого тела — Солнца. Ракета движется вокруг Солнца по орбите, которую без ощутимой ошибки можно считать эллипсом.

4. Рассмотрим теперь частный случай эллиптического движения: когда орбита спутника является окружностью. Скорость, которую должен иметь спутник для того, чтобы его орбита была окружностью, называется *круговой скоростью*. Найдем ее величину и направление.

Пусть спутник находится на расстоянии r_0 от притягивающего центра. В данном случае $\varepsilon = 0$ и в любой момент

времени $r = p = r_0$. При помощи формул (2.6.1) и (2.6.2) получим, что $v_r = 0$, $v_n = \sqrt{K/p} = \sqrt{K/r_0}$. Поэтому круговая скорость спутника имеет величину

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{r_0}}. \tag{6}$$

Так как $v_r = 0$, то *круговая скорость направлена перпендикулярно к радиусу-вектору спутника*. Если же спутник имеет скорость, равную по величине $\sqrt{K/r_0}$, но она не перпендикулярна к его радиусу-вектору, то спутник будет описывать эллипс вокруг притягивающего центра (или будет двигаться по отрезку прямой). Эксцентриситет этого эллипса определяется из формул

$$\sigma = r_0 v_0 \sin\varphi = \sqrt{\frac{K}{r_0}}\, r_0 \sin\varphi,$$

$$h = v_0^2 - \frac{2K}{r_0} = -\frac{K}{r_0}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + h\left(\frac{\sigma}{K}\right)^2},$$

где φ — угол между радиусом-вектором спутника и вектором его скорости.

Поэтому

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{K}{r_0}\,\frac{K r_0 \sin^2\varphi}{K^2}} = |\cos\varphi|. \tag{7}$$

Из формул (5) и (6) следует:

$$v_{\text{пар}} = v_{\text{кр}}\sqrt{2} \approx 1{,}4\, v_{\text{кр}}. \tag{8}$$

Можно теперь переписать интеграл энергии (2.3.2) в следующем виде:

$$v^2 = v_{\text{пар}}^2 + h, \tag{9}$$

или

$$v^2 = v_{\text{пар}}^2 + v_\infty^2. \tag{10}$$

5. При рассмотрении спутников реального небесного тела (Земли или другой планеты; Луны или другого естественного массивного спутника какой-либо планеты; Солнца

или какой-либо другой звезды) следует иметь в виду, что это тело не точка, что оно имеет определенные размеры.

В простейших расчетах вместо реального космического тела T рассматривается его модель в виде шара (со сферическим распределением плотности), имеющего такую же массу и такой же объем, как тело T; радиус такого шара называется *средним радиусом* тела T.

Так, например, вместо реальной Земли с ее сложной геометрической и механической структурой рассматривается шар того же объема («земной шар»); радиус этого шара — средний радиус Земли — составляет 6371,0 *км*.

Пусть центральное тело T — идеальный шар (со сферическим распределением плотности) радиуса r_0.

Под *первой космической скоростью* относительно данного космического тела (планеты, звезды и т. п.) понимают круговую скорость v_{I} у поверхности этого тела. Зная первую космическую скорость, легко подсчитать период T_0 обращения так называемого *нулевого спутника* звезды (или планеты), то есть гипотетического спутника, который двигался бы по окружности в непосредственной близости от поверхности небесного тела при допущении, что это тело — идеальный шар.

Под *второй космической скоростью* относительно данного космического тела (звезды, планеты и т. п.) понимают параболическую скорость v_{II} у поверхности космического тела.

Пример 1. Вычислить I и II космические скорости относительно Земли и период T_0 обращения ее нулевого спутника. Пусть $m_З$ — масса Земли. Средний радиус Земли $r_0 = 6371$ *км*, $K = fm_З$. Сила, с которой Земля притягивает массу m, равна $fm_Зm/r_0^2$ и в то же время равна mg_0, где g_0— ускорение свободного падения на поверхности Земли. Отсюда

$$fm_Зm/r_0^2 = mg_0,\ K = fm_З = g_0r_0^2;$$

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{K/r_0} = \sqrt{g_0r_0} = \sqrt{9{,}820\cdot 6371\cdot 10^3} \approx$$

$$\approx 7910\ м/сек \approx 7{,}9\ км/сек;$$

$$v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}}\sqrt{2} \approx 7910\cdot 1{,}414 \approx 11{,}2\ км/сек.$$

Так как длину большой окружности на поверхности Земли можно принять равной (в среднем) 40 030 *км*, то $T_0 = 40\,030/7{,}910 \approx 5060$ *сек* $= 84^1/_3$ *мин*.

Разумеется, на практике невозможно запустить нулевой спутник. Однако данные о таком воображаемом спутнике (его период обращения T_0, радиус его орбиты r_0, первая космическая скорость v_{I}) могут быть использованы в качестве эталона при вычислении данных о других, реальных спутниках *). Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Какова круговая скорость $v_{\text{кр}}$ и период обращения T спутника, вращающегося на расстоянии r от центра Земли?

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt{\frac{K}{r_0}}\sqrt{\frac{r_0}{r}} = v_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}, \qquad (11)$$

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{кр}}} = \frac{2\pi r_0}{v_{\mathrm{I}}}\frac{r}{r_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} = T_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2}. \qquad (12)$$

Отсюда, между прочим, видно, что с удалением от центра Земли круговая скорость спутника убывает (а значит, убывает и пропорциональная ей параболическая скорость), а его период обращения возрастает.

Более полезным, чем нулевой спутник, в роли эталона оказался бы круговой спутник Земли, вращающийся на высоте около 170—300 *км* (например, на высоте 230 *км*, то есть на расстоянии 6600 *км* от центра Земли).

Задачи

1. Спутник Солнца находится на расстоянии $149{,}6\cdot 10^6$ *км* от центра Солнца. Найдите круговую и параболическую скорости относительно Солнца на этом расстоянии.

2. Какую скорость должен получить круговой спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом экватора? На какой высоте должен быть запущен такой «суточный» спутник?

3. Советская космическая ракета, запущенная 12 сентября 1960 года и попавшая в Луну, имела на расстоянии 320 000 *км* от центра Земли скорость около 2,31 *км/сек* относительно Земли. Считая, что движение ракеты происходило (от конца пассивного участка до момента удаления

*) Заметим, что во многих популярных книгах по космонавтике в качестве радиуса орбиты нулевого спутника Земли принимают экваториальный радиус Земли. Разумеется, от этого нулевой спутник не становится более реальным, более осуществимым.

на расстояние в 320 000 *км*) по коническому сечению, определите, была траектория ракеты эллиптической, гиперболической или параболической.

4. Орбиту Луны можно в первом приближении считать окружностью радиуса $R \approx 384\,400$ *км* $\approx 60r_0$ (r_0 — радиус Земли). Найдите круговую скорость $v_{\text{кр}}$ и параболическую скорость $v_{\text{пар}}$ (относительно Земли) в точках этой орбиты.

5. Вычислите I и II космические скорости относительно Луны.

6. Вычислите линейную скорость и период обращения кругового спутника, двигающегося на расстоянии 6600 *км* от центра Земли.

§ 8. ЭЛЛИПС И ГИПЕРБОЛА С ЕДИНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Некоторые важные свойства движения спутника формулируются и доказываются по-разному в зависимости от того, будет ли движение эллиптическим или гиперболическим. Однако можно дать такой аналитический подход к этим кривым, который позволит получить *единый* вывод свойств обоих видов движения.

Для этого воспользуемся некоторыми элементарными сведениями из теории функций комплексного переменного. Тригонометрические функции $\cos Z$ и $\sin Z$ и показательную функцию e^Z рассматривают в математике не только при вещественных, но и при произвольных комплексных значениях Z *), определяя их как суммы бесконечных степенных рядов:

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots;$$

отсюда легко получить известные формулы Эйлера

$$e^{iZ} = \cos Z + i \sin Z,$$

$$\cos Z = \frac{1}{2}(e^{iZ} + e^{-iZ}), \qquad \sin Z = \frac{1}{2i}(e^{iZ} - e^{-iZ}).$$

*) См., например, А. Ф. Бермант, Краткий курс математического анализа, Физматгиз, 1963, или [0.20].

Из этих формул вытекает, например, что при *любом комплексном* Z

$$\cos^2 Z + \sin^2 Z = 1.$$

По аналогии с тригонометрическими функциями определяются и так называемые гиперболические функции $\operatorname{ch} Z$ и $\operatorname{sh} Z$:

$$\operatorname{ch} Z = \frac{1}{2}(e^Z + e^{-Z}), \quad \operatorname{sh} Z = \frac{1}{2}(e^Z - e^{-Z}).$$

Легко проверить, что при любом t

$$\cos it = \operatorname{ch} t, \ \sin it = i \operatorname{sh} t.$$

При изменении вещественного t от 0 до ∞ и от 0 до $-\infty$ $\operatorname{ch} t$ монотонно возрастает от 1 до ∞, при изменении t от $-\infty$ до ∞ $\operatorname{sh} t$ растет от $-\infty$ до ∞.

2. Пусть a и b — два каких-либо постоянных числа. Рассмотрим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos Z, \\ y &= b \sin Z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при двух различных предположениях относительно a, b, Z.

Случай 1. $a \geqslant b > 0$, Z пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Случай 2. $a < 0, b = -i\,|b|, Z = iH$, H пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Нетрудно проверить, что не только в случае 1, но и в случае 2 x и y — вещественные числа. Ясно также, что точка P, координаты которой определяются формулами (1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Но (2) — это уравнение *эллипса* в случае 1, а в случае 2 (когда $b = -i|b|$) — это уравнение *гиперболы*:

$$\frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1. \qquad (3)$$

В случае 1, когда Z пробегает вещественные значения от 0 до 2π, точка P ($a\cos Z$, $b\sin Z$) описывает эллипс (рис. 2.9), перемещаясь по нему против часовой стрелки. При изменении Z от $-\infty$ до $+\infty$ точка P многократно описывает этот эллипс.

В случае 2 при изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ точка P ($|a|\operatorname{ch} H$, $b\operatorname{sh} H$) опишет левую ветвь гиперболы в направлении, указанном стрелкой на рис. 2.10.

Введем еще число c по формуле

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \qquad (4)$$

Как в случае 1, так и в случае 2 подкоренное выражение — вещественное неотрицательное число. Условимся в качестве значения корня брать его неотрицательное значение, если b — вещественное число (случай 1), и отрицательное значение корня, если b — мнимое число (случай 2) *). При таком выборе знаков мы получим, что в случае 1 геометрическим местом точек плоскости, сумма расстояний которых от точки A $(c, 0)$ и F $(-c, 0)$ равна $2a$, является эллипс (рис. 2.9), заданный формулой (2). В случае 2 геометрическим местом точек P, для которых разность расстояний от точек A $(c, 0)$ и F $(-c, 0)$ равна $2a$ (то есть для которых $AP - FP = 2a$), есть *левая* ветвь гиперболы (рис. 2.10). Нетрудно проверить, что в принятых нами обозначениях многие формулы для эллипса и гиперболы оказываются *едиными*, например:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad r_\pi = a - c = a(1 - \varepsilon).$$

В дальнейшем мы воспользуемся тем, что все формулы, логически вытекающие из единых формул для эллипса и гиперболы, также будут иметь один и тот же вид для кривых обоих типов. Число a, входящее в единые уравнения эллипса и гиперболы (1), назовем *главной полуосью* соответствующей кривой. Как видно из предыдущего, главная полуось эллипса положительна (она равна длине его большой полуоси), а главная полуось гиперболы отрицательна (она равна

*) Число c имеет простой геометрический смысл: это абсцисса фокуса A эллипса или гиперболы.

длине вещественной полуоси гиперболы, взятой со знаком минус). Примем, что при $\varepsilon > 1$ $\sqrt{1-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon - 1}$, причем $\sqrt{\varepsilon - 1} > 0$, $\sqrt{\varepsilon + 1} > 0$ (берутся положительные значения корней). При таких условиях и для гиперболы остается справедливой формула $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

§ 9. СВЯЗЬ КОНСТАНТЫ ЭНЕРГИИ СПУТНИКА С ВЕЛИЧИНОЙ ГЛАВНОЙ ПОЛУОСИ ЕГО ОРБИТЫ

1. В § 3 мы получили интеграл энергии

$$v^2 = \frac{2K}{r} + h. \tag{1}$$

Если спутник находится в перицентре, то $r = r_\pi$, $v = v_\pi$ и поэтому

$$h = v_\pi^2 - \frac{2K}{r_\pi}. \tag{2}$$

Воспользуемся следующими формулами (см. §§ 5—6):

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), \quad v_\pi = \sqrt{\frac{K}{p}}(1+\varepsilon).$$

Тогда из (2) следует, что

$$h = \frac{K}{p}(1+\varepsilon)^2 - \frac{2K}{r_\pi} = \frac{K}{r_\pi}(1+\varepsilon) - \frac{2K}{r_\pi} = -\frac{K}{r_\pi}(1-\varepsilon),$$

то есть

$$h = -\frac{K}{a}. \tag{3}$$

Теперь интеграл энергии можно записать в ином виде:

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

или

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1-\varepsilon}{r_\pi}\right). \tag{5}$$

Последние формулы верны как для эллипса ($a > 0$), так и для гиперболы ($a < 0$); они верны и для параболы ($a = \infty$; $\varepsilon = 1$). В случае гиперболической орбиты $a = -|a|$,

$h = v_\infty^2$; поэтому

$$v_\infty^2 = \frac{K}{|a|}. \qquad (6)$$

В случае эллипса $2a - r = r_1$, где r_1 — расстояние спутника до «пустого» фокуса F, в котором не находится притягивающий центр (этот фокус иногда называют «антифокусом»). Известно, что $K/r = v_{кр}^2$, где $v_{кр}$ — местная круговая скорость в той точке, где находится спутник. Поэтому

$$v^2 = \frac{K(2a-r)}{ra} = \frac{K}{r}\frac{r_1}{a} = v_{кр}^2 \frac{r_1}{a},$$

$$v = v_{кр}\sqrt{\frac{r_1}{a}}. \qquad (7)$$

Эту формулу можно записать так:

$$v = v_{кр}\sqrt{r_1/|a|}. \qquad (8)$$

В таком виде она верна и для гиперболы.

Пример. Высота перигея третьего советского ИСЗ в первые дни после запуска (май 1958 года) была равна $H_\pi = 226$ *км*, высота апогея спутника $H_\alpha = 1880$ *км*. Какова была скорость этого спутника при прохождении через его перигей и апогей?

Решение. $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right) = K\frac{2a - r_\pi}{ar_\pi} = \frac{K}{a}\frac{r_\alpha}{r_\pi}$.

Но $K = gr_0^2$, где r_0 — радиус Земли. Поэтому

$$v_\pi^2 = \frac{2gr_0^2}{2r_0 + H_\alpha + H_\pi}\cdot\frac{r_0 + H_\alpha}{r_0 + H_\pi}.$$

v_α найдем по правилу рычага: $v_\alpha r_\alpha = v_\pi r_\pi$. В нашем случае $r_0 = 6371$ *км*, $H_\alpha = 1880$ *км*, $H_\pi = 226$ *км*. После вычислений получим $v_\pi = 8{,}2$ *км/сек*, $v_\alpha = 6{,}6$ *км/сек*.

2. Пользуясь интегралом энергии в форме (4), можно сделать некоторые любопытные выводы о движении спутника по гиперболической орбите на больших расстояниях от притягивающего центра (то есть при больших r).

Заметим сначала, что если r велико́ (по сравнению с $|a|$), то точки гиперболической орбиты, через которые проходит

спутник, близки к асимптоте этой гиперболы. А это значит, что при больших r спутник практически движется *прямолинейно*.

Покажем теперь, что при больших r по гиперболической орбите спутник движется практически *равномерно* со скоростью v_∞.

Формулу (4) можно в случае гиперболического движения переписать таким образом:

$$v = \sqrt{K}\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{|a|}}. \tag{9}$$

Отсюда при $r \to \infty$ найдем

$$v_\infty = \sqrt{K/|a|}, \text{ то есть } |a| = K/v_\infty^2. \tag{10}$$

Поэтому

$$v = \sqrt{K\left(\frac{2}{r} + \frac{v_\infty^2}{K}\right)} = v_\infty\sqrt{\frac{2K}{rv_\infty^2} + 1} <$$

$$< v_\infty\sqrt{1 + 2\frac{K}{rv_\infty^2} + \left(\frac{K}{rv_\infty^2}\right)^2} = v_\infty\left(1 + \frac{K}{rv_\infty^2}\right).$$

Итак,

$$v_\infty < v < v_\infty + \frac{K}{rv_\infty}, \tag{11}$$

или

$$0 < v - v_\infty < \frac{K}{rv_\infty}. \tag{12}$$

Пусть при движении вдоль какого-либо участка его орбиты все время выполняется неравенство $r > r_0$. Тогда

$$0 < v - v_\infty < \frac{K}{r_0 v_\infty}. \tag{13}$$

Если спутник движется далеко от притягивающего центра, то $K/(r_0 v_\infty)$ мало. А это значит, что на больших расстояниях от притягивающего центра спутник движется практически *равномерно* со скоростью v_∞. Эти соображения можно использовать для примерной оценки времени движения спутника на участках гиперболической орбиты, далеких от центрального тела.

Действительно, пусть спутник движется по дуге P_0P_1 гиперболической орбиты, причем эта дуга расположена настолько далеко от притягивающего центра, что практически допустимо считать движение спутника по этой дуге прямолинейным. Пусть $AP_0 = r_0$, $AP_1 = r_1$. Длину дуги P_0P_1 можно приближенно считать равной $r_1 - r_0$.

Скорость v спутника в любой момент времени будет заключена между v_∞ и $v_\infty + K/(r_0 v_\infty)$. Поэтому время для перелета вдоль дуги P_0P_1 будет практически заключено между числом $(r_1 - r_0)/v_\infty$ и числом $\frac{r_1 - r_0}{v_\infty} \Big/ \left(1 + \frac{K}{r_0 v_\infty^2}\right)$, которое близко к числу $\frac{r_1 - r_0}{v_\infty}\left(1 - \frac{K}{r_0 v_\infty^2}\right)$. Следовательно, если примем, что спутник потратил на перелет по дуге P_0P_1 время

$$\tau = \frac{r_1 - r_0}{v_\infty}, \qquad (14)$$

то за предел относительной погрешности можно принять число

$$\delta = \frac{K}{r_0 v_\infty^2}. \qquad (15)$$

Такая оценка является *завышенной*. В действительности относительная погрешность будет меньше, как это видно из следующих соображений. Время $t_1 - t_0$ перелета вдоль дуги P_0P_1 можно считать равным

$$t_1 - t_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v}.$$

В силу неравенства (11) имеем

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty\left(1 + \frac{K}{r v_\infty^2}\right)} < t_1 - t_0 < \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty\left(1+\frac{K}{rv_\infty^2}\right)} = \tau - \frac{K}{v_\infty^3}\ln\frac{r_1+K/v_\infty^2}{r_0+K/v_\infty^2}.$$

Но $\frac{r_1+K/v_\infty^2}{r_0+K/v_\infty^2} < \frac{r_1}{r_0}$, если $r_1 > r_0$. Поэтому за границу абсолютной погрешности приближения $t_1 - t_0 \approx \tau$ можно принять число

$$\Delta\tau = \frac{K}{v_\infty^3}\ln\frac{r_1}{r_0}. \tag{16}$$

Иначе говоря,

$$\tau - \frac{K}{v_\infty^3}\ln\frac{r_1}{r_0} < t_2 - t_1 < \tau. \tag{17}$$

Границей относительной погрешности будет служить число $\Delta\tau/\tau$, то есть число

$$\delta = \frac{K}{v_\infty^2}\frac{\ln(r_1/r_0)}{r_1 - r_0}. \tag{18}$$

А это число меньше, чем $K/(v_\infty^2 r_0)$ (в силу известного неравенства $\ln(1+\alpha) < \alpha$ при $\alpha > 0$).

Пример. Как сообщило ТАСС (см. «Правду» за 26 февраля 1961 года), советская автоматическая межпланетная станция (АМС), посланная в сторону Венеры 12 февраля 1961 года, находилась 13 февраля в 12 часов дня (по московскому времени) на расстоянии 488 900 *км* от Земли (будем считать, что от поверхности Земли). Согласно данным из сообщения ТАСС, скорость v_∞ можно считать равной 4,0 *км/сек*. Через сколько времени АМС удалилась от центра Земли на расстояние, равное 1 000 000 *км*? (Предполагается, что влиянием Солнца на движение АМС можно в этих расчетах пренебречь.)

Решение. Так как радиус Земли равен 6370 *км*, то можно считать $r_0 = 495\,000$ *км*, $r_1 = 1\,000\,000$ *км*. Имеем

$$\tau = \frac{r_1 - r_0}{v_\infty} = \frac{505\,000}{4{,}0} \approx 126\,200 \text{ сек} \approx 35 \text{ час}.$$

Следовательно, на расстоянии в 1 млн. *км* от центра Земли АМС была 14 февраля около 23 часов (по московскому времени). Эта дата и приведена в том же сообщении ТАСС.

Оценим абсолютную погрешность по формуле (16):

$$\frac{K}{v_\infty^2} = \frac{398\,600}{4{,}0^2} \approx 25\,000 \text{ км}, \quad \frac{K}{v_\infty^3} \approx 6250,$$

$$\Delta\tau \leqslant 6250 \ln \frac{10^6}{495\cdot 10^3} < 6250 \ln 2{,}1 <$$

$$< 6250 \cdot \frac{3}{4} < 4800 \text{ сек} = 1{,}5 \text{ час.}$$

Таким образом, величина $t_1 - t_0$ вычислена с погрешностью, не превосходящей полутора часов: АМС оказалась на расстоянии 10^6 *км* от Земли 14 февраля между 21 час. 30 мин. и 23 часами по московскому времени.

Задачи

1. Зная скорость v_π спутника Земли в перигее и перигейное расстояние спутника r_π, вычислите его апогейное расстояние r_α и апогейную скорость v_α.

2. Найдите наибольшую и наименьшую скорость, с которой движется Земля вокруг Солнца. Сравните эти скорости со средней скоростью движения Земли вокруг Солнца (то есть с той скоростью, которую имела бы Земля, если бы она двигалась вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным среднему расстоянию от Земли до Солнца). Эксцентриситет ε орбиты Земли равен $^1/_{60}$, а среднее расстояние Земли до Солнца — $149{,}6\cdot 10^6$ *км*.

3. Какую минимальную начальную скорость необходимо сообщить космолету параллельно поверхности Земли на высоте 230 *км* для того, чтобы он мог попасть в Луну в ее апогее? Притяжением Луны пренебречь.

Решите ту же задачу для случая попадания в Луну в ее перигее. Среднее расстояние Луны от Земли $a_Л = 384\,400$ *км*, эксцентриситет лунной орбиты $\varepsilon = 0{,}055 \approx {}^1/_{18}$.

4. Докажите, что при прохождении спутника, движущегося по эллиптической орбите, через конец ее малой оси скорость спутника равна по абсолютной величине местной круговой скорости.

5. Для того чтобы спутник мог длительное время обращаться вокруг планеты, он не должен приближаться к ее поверхности ближе, чем на расстояние h (в противном случае он быстро сгорит в ее атмосфере). Спутник выходит на эллиптическую орбиту в точке B на высоте $H > h$ над поверхностью планеты со скоростью, направленной параллельно

этой поверхности. В каких пределах должна находиться величина начальной скорости для того, чтобы спутник мог длительное время обращаться вокруг планеты (то есть, чтобы $r_\pi \geqslant h$)? Планета сферической структуры.

6. Спутник, движущийся по гиперболической орбите (рис. 2.10), приближается к звезде с весьма большого расстояния (из «бесконечности»). На больших расстояниях от звезды («на бесконечности») он движется практически прямолинейно — по асимптоте к своей орбите, отстоящей от звезды на известном расстоянии d, и имеет скорость $\boldsymbol{v}_1$, причем $|\boldsymbol{v}_1| = v_\infty$. После прохождения через периастр $П$ спутник будет неограниченно удаляться от звезды и на достаточно больших расстояниях от нее («на бесконечности») он опять будет двигаться практически по прямой со скоростью $\boldsymbol{v}_2$ ($|\boldsymbol{v}_2| = v_\infty$). Вычислите угол λ между векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (то есть угол, на который повертывается вектор скорости спутника в результате воздействия звезды). Гравитационный параметр K звезды известен.

7. Ракета запускается под углом φ к вертикали на расстоянии R от центра Земли. Найдите минимальную начальную скорость v, которую следует сообщить ракете для того, чтобы она удалилась от центра Земли на данное расстояние d. Выведите формулы для большой полуоси и эксцентриситета орбиты ракеты.

8. Ракета получила на высоте H над поверхностью Земли некоторую начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную под углом ψ к горизонту. Какова должна быть величина этой начальной скорости для того, чтобы перигейное расстояние ракеты было равно заданной величине h ($h < H$)?

9. Советская автоматическая межпланетная станция (АМС), посланная к Венере 12 февраля 1961 года, стартовала с борта космической ракеты. В момент отделения от ракеты скорость АМС превышала местную параболическую скорость на $d = 661$ *м/сек*. Кроме того, известно, что АМС на расстоянии $r_0 = 488\,900$ *км* от поверхности Земли имела скорость $v_0 = 4{,}050$ *км/сек*. На какой высоте H над поверхностью Земли отделилась АМС от несшей ее космической ракеты? Какую скорость имела АМС в этот момент? Вычислите длину главной полуоси орбиты АМС. Была ли орбита АМС вблизи Земли эллиптической, гиперболической или параболической?

10. При прохождении через некоторую точку P, отстоящую от звезды A на расстоянии r_0, спутник звезды имел скорость v_0. Местная параболическая скорость в точке P равна $v_{\text{пар}}$. Вычислите главную полуось a орбиты спутника.

11. При прохождении через периастр спутник P звезды A имел скорость v_0. Местная круговая скорость $v_{\text{кр}}$ в периастре известна. Вычислите эксцентриситет орбиты спутника.

12. Спутник P звезды A при прохождении через точку P_0 своей эллиптической орбиты отстоял от центра звезды на расстоянии r_0 и имел скорость v_0. Известно, что если бы в этот момент скорость спутника $\boldsymbol{v}_0$ была перпендикулярна к его радиусу-вектору $\overrightarrow{AP_0}$, то орбита спутника имела бы эксцентриситет ε_0. В действительности же вектор скорости спутника v_0 образует с радиусом-вектором спутника угол α. Местная круговая скорость $v_{\text{кр}}$ в точке P_0 известна. Найдите эксцентриситет ε

орбиты спутника и его периастральное расстояние r_π (расстояние от периастра до центра звезды).

13. Космолет движется (с выключенным двигателем) в поле тяготения звезды A, имеющей гравитационный параметр K. В момент прохождения космолета через некоторую точку C его скорость была равна v и направлена под углом φ к радиусу-вектору космолета $\overrightarrow{AC}$. Местная круговая скорость в точке C равна $v_{кр}$. Какова истинная аномалия θ космолета в момент прохождения через точку C, если известно, что $0 < \theta < \pi$?

14. Космолет P, совершающий перелет с орбиты Земли к орбите Марса, находится на расстоянии $150 \cdot 10^6$ *км* от Солнца (A) и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Скорость космолета относительно Солнца в этот момент равна 35,0 *км/сек* и направлена под углом 60° к радиусу-вектору $\overrightarrow{AP}$. Вычислите истинную аномалию космолета при прохождении через точку P.

§ 10. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе будет идти речь только об эллиптическом движении. *Периодом обращения* спутника вокруг притягивающего центра называют время T между двумя последовательными моментами прохождения спутника через его перицентр. Пусть τ — время, прошедшее с момента t_0 прохождения спутника через перицентр Π, s — площадь, заметенная радиусом-вектором спутника в течение этого времени. По второму закону Кеплера $s = \frac{1}{2}\sigma\tau$. Когда спутник совершит один полный оборот вокруг притягивающего центра, то от момента t_0 его прохождения через перицентр пройдет время T (где T — период обращения спутника), а радиус-вектор спутника успеет замести весь эллипс и притом один раз. Площадь этого эллипса, как известно, равна πab, следовательно,

$$\pi ab = \frac{1}{2}\sigma T,$$

$$T = \frac{2\pi ab}{\sigma} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{p}} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{b^2/a}},$$

то есть

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2}. \tag{1}$$

Эта формула позволяет найти период обращения спутника, если известна большая полуось его орбиты и гравитационный параметр K. Из формулы (1) видно, что при изменении эксцентриситета орбиты или ее малой полуоси b или фокального параметра p период спутника не изменится; только изменение большой полуоси влияет на период обращения спутника (при данном K). Формулу (1) можно переписать и так:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2}. \tag{2}$$

Так как за T единиц времени радиус-вектор спутника заметает угол в 2π радиан, то в среднем в течение одной единицы времени этот радиус-вектор заметет угол в $2\pi/T$ радиан. Число

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

называется *средней угловой скоростью* движения эллиптического спутника, или его *средним движением*. Из (1) видно, что

$$n = \frac{\sqrt{K}}{a^{3/2}}. \tag{4}$$

Мы здесь пока не делали никаких предположений относительно параметра K. Допустим теперь, что речь идет об «ограниченной» задаче двух тел, то есть о движении малого (непритягивающего) спутника. В таком случае $K = fM$, где M — масса притягивающего центра, и

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{fM}{4\pi^2}. \tag{5}$$

Если другой малый спутник обращается вокруг того же притягивающего центра и если a_1 и T_1 — соответственно большая полуось его орбиты и период его обращения, то и для него

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{fM}{4\pi^2},$$

так что

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3}. \tag{6}$$

Таким образом, мы вывели третий закон Кеплера:

Квадраты периодов обращения двух непритягивающих спутников одного и того же притягивающего центра пропорциональны кубам их средних расстояний от притягивающего центра.

2. Допустим, что центральное тело можно рассматривать как шар радиуса r_0 со сферическим распределением плотности. Период T_0 обращения нулевого спутника этого центрального тела равен $2\pi r_0^{3/2} / \sqrt{fM}$. Период обращения всякого другого (ненулевого) спутника определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{fM}} a^{3/2}, \tag{7}$$

где a — большая полуось орбиты этого спутника. Поэтому

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}. \tag{8}$$

Так как $a > r_0$, то $T > T_0$. Таким образом, период обращения любого спутника центрального тела больше периода обращения нулевого спутника. Например, период обращения нулевого спутника Земли равен 84,3 *мин*; следовательно, период обращения всякого другого спутника Земли заведомо больше чем 84,3 *мин*. Заметим попутно, что период обращения реального спутника Земли не может быть меньше 87,7 *мин* — при меньшем периоде спутник прекращает свое существование уже на первых витках.

Пример. Для первого советского ИСЗ высота перигея была равна $H_\pi \approx 230$ *км*, высота апогея $H_\alpha \approx 950$ *км*. Каков был его период обращения?

Решение. Если r_0 — радиус Земли, то большая полуось a его орбиты равна $a = \frac{1}{2}(2r_0 + H_\alpha + H_\pi)$. По формуле (8)

$$T = T_0 \left(1 + \frac{H_\alpha + H_\pi}{2r_0}\right)^{3/2}.$$

Производя разложение в биномиальный ряд и отбрасывая все члены, кроме первого и второго, получим

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{3}{4}\frac{H_\alpha + H_\pi}{r_0}\right) \approx 96{,}1 \text{ мин.}$$

Более точный подсчет показывает, что погрешность найденного значения T не превосходит 0,1 *мин.*

Если в какой-то «начальный» момент времени малый (непритягивающий) спутник находится на расстоянии r_0 от центрального тела и имеет скорость v_0, то большая полуось орбиты определяется из формулы

$$v_0^2 = K\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right).$$

Поэтому (см. (7)) период обращения спутника T зависит только от абсолютной величины скорости, но не от ее направления: если в какой-то точке пространства стартует малый спутник с некоторой эллиптической скоростью v_0, то при любом направлении вектора скорости спутник вернется в точку старта через одно и то же время (если только он по пути не столкнется с центральным телом).

3. Рассмотрим теперь общий случай задачи двух тел (случай притягивающего спутника). В этом случае

$$K = f\,(M + m), \tag{9}$$

где M — масса притягивающего центра, m — масса спутника. Из (2) и (9) следует, что

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f\,(M + m)}{4\pi^2}. \tag{10}$$

Для периода T_1 другого спутника того же притягивающего центра, имеющего массу m_1, получим уравнение

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{f\,(M + m_1)}{4\pi^2}.$$

Отсюда

$$\frac{T^2}{T_1^2}\,\frac{1 + m/M}{1 + m_1/M} = \frac{a^3}{a_1^3}. \tag{11}$$

Эта формула выражает так называемый «уточненный третий

закон Кеплера», найденный И. Ньютоном. Она находит, в частности, применение при «взвешивании» (точнее, при вычислении масс) планет и их естественных спутников. Из формулы (10) следует, между прочим, такой парадоксальный вывод: чем тяжелее спутник, движущийся вокруг центрального тела по данной орбите, тем быстрее обойдет он свою орбиту.

4. Во введении мы привели значение универсальной константы тяготения f в интернациональной системе единиц (основные единицы длины, массы, времени — так называемые лабораторные единицы: метр, килограмм, секунда). В этом значении f — только четыре верные значащие цифры.

При выборе траекторий полета к другим планетам и для решения многих других задач космонавтики такая точность совершенно недостаточна. Существует другая система основных единиц — так называемая астрономическая система единиц, в которой удается найти константу тяготения со значительно большей точностью — с девятью-десятью верными значащими цифрами. В этой системе за единицу длины принимается среднее расстояние от центра Земли до центра Солнца; за единицу массы — масса Солнца; за единицу времени — средние солнечные сутки. Для вычисления константы тяготения можно воспользоваться третьим законом Кеплера. Константу тяготения f в астрономической системе единиц обычно обозначают через k^2 (k — константа Гаусса). Для нахождения константы k Гаусс воспользовался известным ему значением периода обращения Земли вокруг Солнца $T_З = 1$ год $= 365{,}2563835$ средних солнечных суток и известным в его время значением для отношения массы Земли к массе Солнца:

$$m_З/m_С = 0{,}000002819.$$

Применяя формулу (10) к системе Солнце — Земля, получим

$$k = \frac{2\pi}{T_З}\sqrt{\frac{a^3}{m_С + m_З}}. \qquad (12)$$

Полагая в этой формуле $a = 1$, $m_С = 1$, $m_С + m_З = 1{,}000002819$, $T_З = 365{,}2563835$, Гаусс нашел $k = 0{,}01720209895$. . (здесь 9 верных значащих цифр). При

получении более точных значений для $T_З$ и для отношения $m_З/m_С$ можно было бы по формуле (12) найти более точное значение для k.

Для проектирования межпланетных перелетов существенно знать с большой точностью гравитационный параметр Солнца $K_С$. Обозначим значение $K_С$ в астрономической системе единиц через $K_{С(астр)}$, а в лабораторной системе единиц — через $K_{С(лаб)}$. Очевидно, что

$$K_{С\,(астр)} = k^2 \frac{(а.\ е.)^3}{сут^2}.$$

Если a — число километров, содержащихся в одной астрономической единице, то

$$K_{С\,(лаб)} = k^2 \frac{a^3}{(24 \cdot 3600)^3}\ км^3/сек^2. \qquad (13)$$

Следовательно, для нахождения с большой точностью гравитационного параметра Солнца в лабораторных единицах необходимо знать с большой точностью в километрах длину астрономической единицы.

Так как при запуске межпланетных кораблей начальные данные задаются в лабораторной системе единиц (например, скорость в момент отсечки двигателя), то исключительно важно знать с большой точностью астрономическую единицу в километрах. В течение последних лет были предприняты энергичные шаги для точного измерения астрономической единицы (в километрах). В 1961 году в СССР, США и Англии были для этой цели использованы результаты радиолокации Венеры.

Наблюдения и расчеты, выполненные группой советских ученых (В. А. Котельников и др. [2.1]), привели к следующему значению астрономической единицы:

$$a = (149\,599\,300 \pm 2000)\ км.$$

Такое значение a позволяет вычислить в лабораторных единицах гравитационный параметр Солнца с точностью до шести-семи верных значащих цифр. По данным Калифорнийского технологического института

$$a = (14\,959\,8500 \pm 500)\ км.$$

Задачи

1. Мы видели, что период обращения всякого малого («непритягивающего») спутника звезды больше периода обращения ее нулевого спутника. Верно ли это утверждение и для всякого притягивающего спутника звезды?

2. Согласно сообщению ТАСС, опубликованному 16 мая 1958 года, период обращения третьего советского ИСЗ 15 мая 1958 года составлял 106 *мин*, а наибольшая его высота над поверхностью Земли 1880 *км*. В сводке ТАСС ничего не говорится о наименьшей высоте спутника. Вычислите эту наименьшую высоту.

3. Орбита корабля-спутника «Восток-II», на котором советский космонавт Г. С. Титов 6—7 августа 1961 года совершил многократный облет вокруг Земли, имел на первых витках такие параметры: наибольшая высота $H_\alpha = 244$ *км*, наименьшая высота $H_\pi = 183$ *км*. Найдите период обращения спутника.

4. Космический корабль совершает полет к перигею Луны. Перигей орбиты космолета находится на высоте 230 *км*. Известно, что перигейная скорость космолета v_π является минимальной для совершения этого полета. Сколько времени займет полет до перигея Луны? Решите аналогичную задачу для перелета к апогею Луны. Расстояния от центра Земли до перигея и апогея Луны равны соответственно 363 300 и 404 000 *км*.

5. Советский спутник «Электрон-2», запущенный в январе 1964 года для исследования радиационных поясов Земли, имел в день запуска перигейную высоту $H_\pi = 460$ *км*. Период обращения спутника составлял 22 *час* 40 *мин*. Найдите апогейную высоту спутника H_α и его апогейную скорость v_α.

6. Будем для простоты считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите, причем расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 400 *км*. В момент, когда Луна находится в точке L_0 своей орбиты, в диаметрально противоположной точке S_0 этой орбиты космическая ракета получает (в плоскости лунной орбиты) местную круговую скорость относительно Земли и начинает обращаться вокруг Земли в том же направлении, что и Луна. Упадет ли эта ракета когда-либо на Луну? Притяжением Луны и Солнца при решении этой задачи пренебречь.

7. Первая советская космическая ракета, запущенная в сторону Луны 2 января 1959 года, через несколько дней после запуска стала спутником Солнца (искусственной планетой). Перигелий ее орбиты отстоит от Солнца на расстоянии $146{,}4 \cdot 10^6$ *км*, афелий — на расстоянии $197{,}2 \cdot 10^6$ *км*. Найдите период обращения этой искусственной планеты вокруг Солнца.

8. Американская космическая ракета «Пионер-V», запущенная в сторону Луны 11 марта 1960 года и ставшая спутником Солнца, имеет период обращения вокруг Солнца 312 суток. Расстояние перигелия ракеты от Солнца равно 120 млн. *км*. Вычислите расстояние афелия ракеты от Солнца.

9. Минимальное удаление советского спутника «Космос-II», запущенного 6 апреля 1962 года, от поверхности Земли составляло в этот

день 213 *км*, а максимальное — 1560 *км*. Подсчитайте, каким был 6 апреля период обращения спутника вокруг Земли.

10. Космолет движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля, и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Космолет получил в направлении своего движения дополнительный импульс скорости, достаточный для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Сколько суток займет этот перелет? Какую скорость относительно Солнца должен был иметь корабль в момент старта с орбиты Земли? Орбиты Земли и Марса относительно Солнца считать окружностями с радиусами $R_З = 150 \cdot 10^6$ *км* и $R_М = 228 \cdot 10^6$ *км*.

11. Решите аналогичную задачу, если перелет должен совершаться с орбиты Земли к орбите Венеры (расстояние Венеры от Солнца $R_В = 108 \cdot 10^6$ *км*).

§ 11. СОЛНЕЧНЫЙ ПАРУС

Полученные в этой главе результаты можно иногда применять при решении задач, в которых участвуют не только гравитационные силы. В качестве примера рассмотрим задачу о солнечном парусе.

В некоторых работах по космонавтике предлагается использовать открытый П. Н. Лебедевым эффект светового давления для приведения в движение космического корабля. Для этой цели можно снабдить корабль парусом достаточно большой площади и использовать для движения спутника давление солнечных лучей на парус.

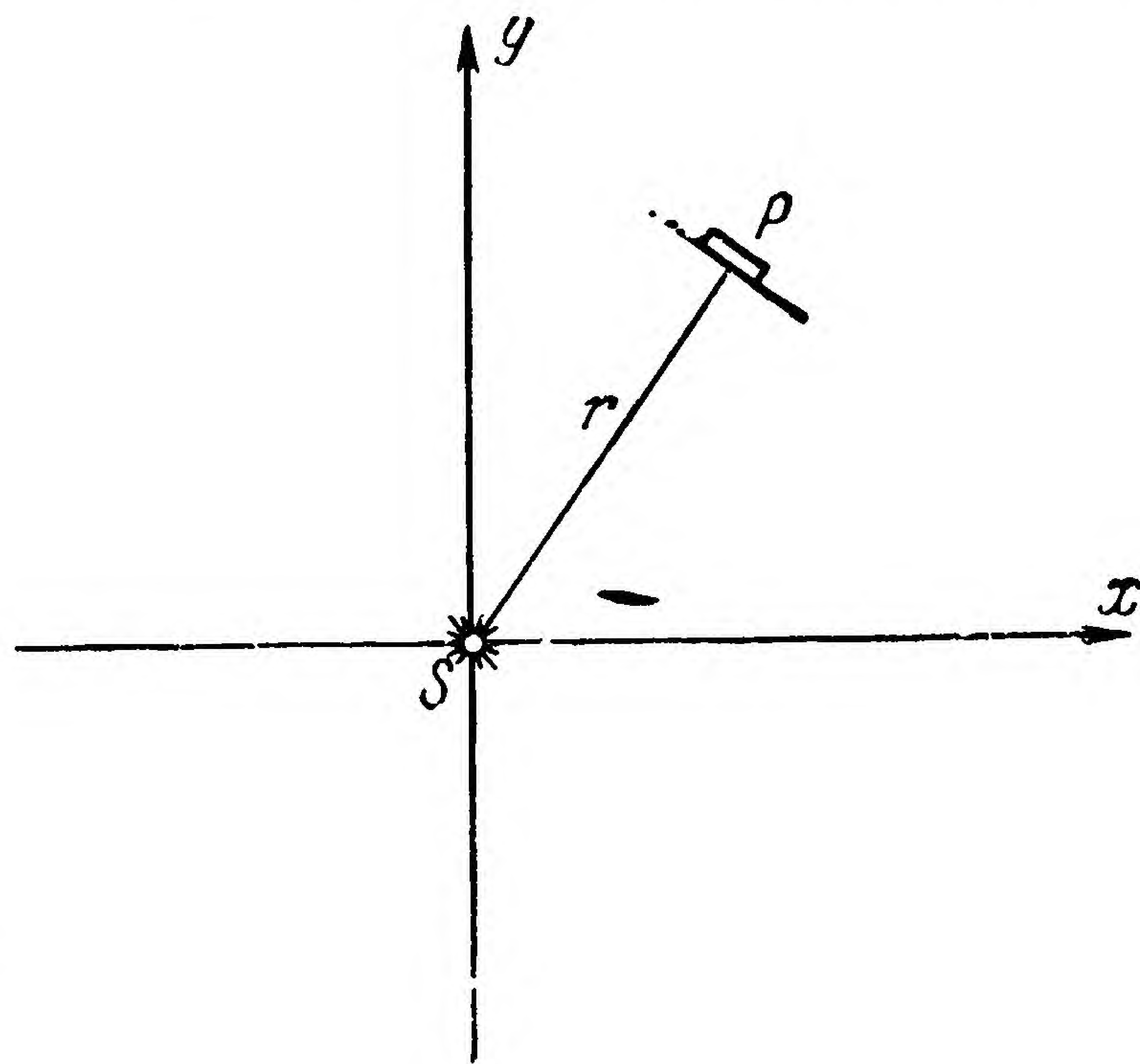


Рис. 2.16.

Рассмотрим частный случай, когда парус плоский и ориентируется в пространстве так, чтобы он был все время перпендикулярен к лучам, идущим от Солнца (рис. 2.16). Будем полагать, что ракетный двигатель космического корабля выключен. Найдем траекторию, по которой будет в этом случае двигаться корабль *).

*) Эту задачу впервые (в 1924 году) решил советский ученый Ф. А. Цандер.

Введем следующие обозначения: s — площадь паруса, r — расстояние паруса от (центра) Солнца, r_0 — среднее расстояние от Земли до Солнца. Сила, с которой солнечные лучи отталкивают парус, может быть вычислена по формуле

$$F_1 = \alpha \frac{r_0^2}{r^2} s, \qquad (1)$$

где α — коэффициент пропорциональности, который может быть найден экспериментально. Этот коэффициент называют константой светового давления. Число α показывает, с какой силой давят солнечные лучи на перпендикулярную к ним площадку, имеющую площадь 1 $м^2$ и расположенную вблизи Земли. Можно принять, что для абсолютно черного паруса $\alpha = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ $н/м^2$. Произведение αs — это суммарная сила, с которой солнечный свет давит на парус, когда последний находится вблизи Земли.

Обозначим через m массу космического корабля (вместе с парусом), через M — массу Солнца. Рассмотрим случай, когда влиянием других небесных тел, кроме Солнца, на корабль можно пренебречь (корабль находится далеко от них).

Выберем систему отсчета с началом в центре Солнца и с осями, постоянно ориентированными в пространстве. Дифференциальное уравнение движения корабля относительно Солнца, очевидно, таково:

$$m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(-f \frac{Mm}{r^2} + \alpha s \frac{r_0^2}{r^2} \right) \frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (2)$$

(здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор корабля $\overrightarrow{SP}$). Последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad (3)$$

где

$$K = fM - \alpha r_0^2 \frac{s}{m}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы пришли к знакомому нам уравнению (8) из § 1, только константа K имеет сейчас иной физический

смысл. Все полученные выше следствия из уравнения (2.1.8) остаются в силе и сейчас. В частности, *корабль с солнечным парусом, постоянно ориентированным перпендикулярно к солнечным лучам, будет двигаться по коническому сечению* (по эллипсу, параболе или гиперболе) *).

Предположим для простоты, что космический корабль до момента развертывания паруса двигался вокруг Солнца по круговой орбите (например, находился на орбите Земли). Его скорость v_0 определяется по формуле

$$v_0^2 = \frac{fM}{r_0}.$$

Пусть в какой-то момент t_0 корабль развернул солнечный парус площади s. Тогда он начал двигаться по коническому сечению, у которого главная полуось a определится из формулы

$$v_0^2 = K\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right),$$

то есть

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{fM - \alpha r_0^2 s/m}. \qquad (5)$$

Обозначим через s_1 то значение величины s, для которого правая часть формулы (5) обращается в нуль. При $0 \leqslant s < s_1$ $\frac{1}{a} > 0$, т. е. $a > 0$, а это значит, что корабль движется вокруг Солнца по некоторому эллипсу. Этот эллипс будет тем более вытянутым, чем больше площадь паруса. Но с течением времени этот эллипс не будет деформироваться, не будет растягиваться (несмотря на постоянное, непрерывное давление солнечных лучей на парус!), и корабль через определенные (одинаковые) промежутки времени будет приходить к той точке своей первоначальной круговой орбиты, где был развернут парус. Если $s = s_1$ или $s > s_1$, то корабль будет неограниченно удаляться от Солнца (соответственно по параболе или гиперболе). Пусть s выбрано настолько большим, чтобы $K = 0$, то

*) При этом следует считать величину K положительной, то есть площадь паруса s не очень большой.

есть $s = s_2 = \frac{fMm}{\alpha r_0^2}$. Тогда солнечное давление на парус компенсирует силу тяготения корабля к Солнцу, и корабль будет двигаться равномерно и прямолинейно. Если же площадь паруса будет больше, чем s_2, то сила, с которой солнечное излучение отталкивает парус, будет больше силы, с которой солнечная масса притягивает корабль. Корабль будет неограниченно удаляться от Солнца по некоторой траектории, обращенной своей выпуклостью к Солнцу (можно показать, что это будет гипербола).

Задачи

1. Космолет с массой в 1000 *кг* движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля (эту орбиту будем считать окружностью), и притом настолько далеко от Земли, что ее притяжением можно пренебречь. С помощью плоского солнечного паруса он должен совершить перелет к орбите Марса по траектории, касающейся орбит Земли и Марса (орбиту Марса считаем окружностью, притом лежащей в одной плоскости с орбитой Земли). Материал, из которого изготовлен парус, таков, что кусок паруса площадью в 1 $м^2$ имеет массу 2 *г*. Во время полета предполагается постоянно ориентировать парус перпендикулярно к солнечным лучам. Давление солнечного света на такой парус, если бы он находился вблизи Земли, составляло бы примерно $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ $н/м^2$. Какую площадь должен иметь парус? Какова его масса?

2. Космический аппарат движется вокруг Солнца под действием светового давления и силы притяжения Солнца. Его солнечный парус имеет такую большую площадь, что постоянная K в дифференциальном уравнении движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -K\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

отрицательна. Найдите уравнение орбиты аппарата и выясните характер его движения.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ *)

1. Для вывода законов Кеплера, уравнения орбиты спутника и некоторых других формул задачи двух тел можно воспользоваться аппаратом комплексных переменных. Пусть материальная точка (P, m) (непритягивающий спутник) движется под влиянием тяготения к притягивающему центру

*) Этот параграф можно при первом чтении опустить.

(A, M). Выберем в плоскости движения прямоугольную систему координат Axy (рис. 2.17). Дифференциальные уравнения движения спутника имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -K\frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -K\frac{y}{r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

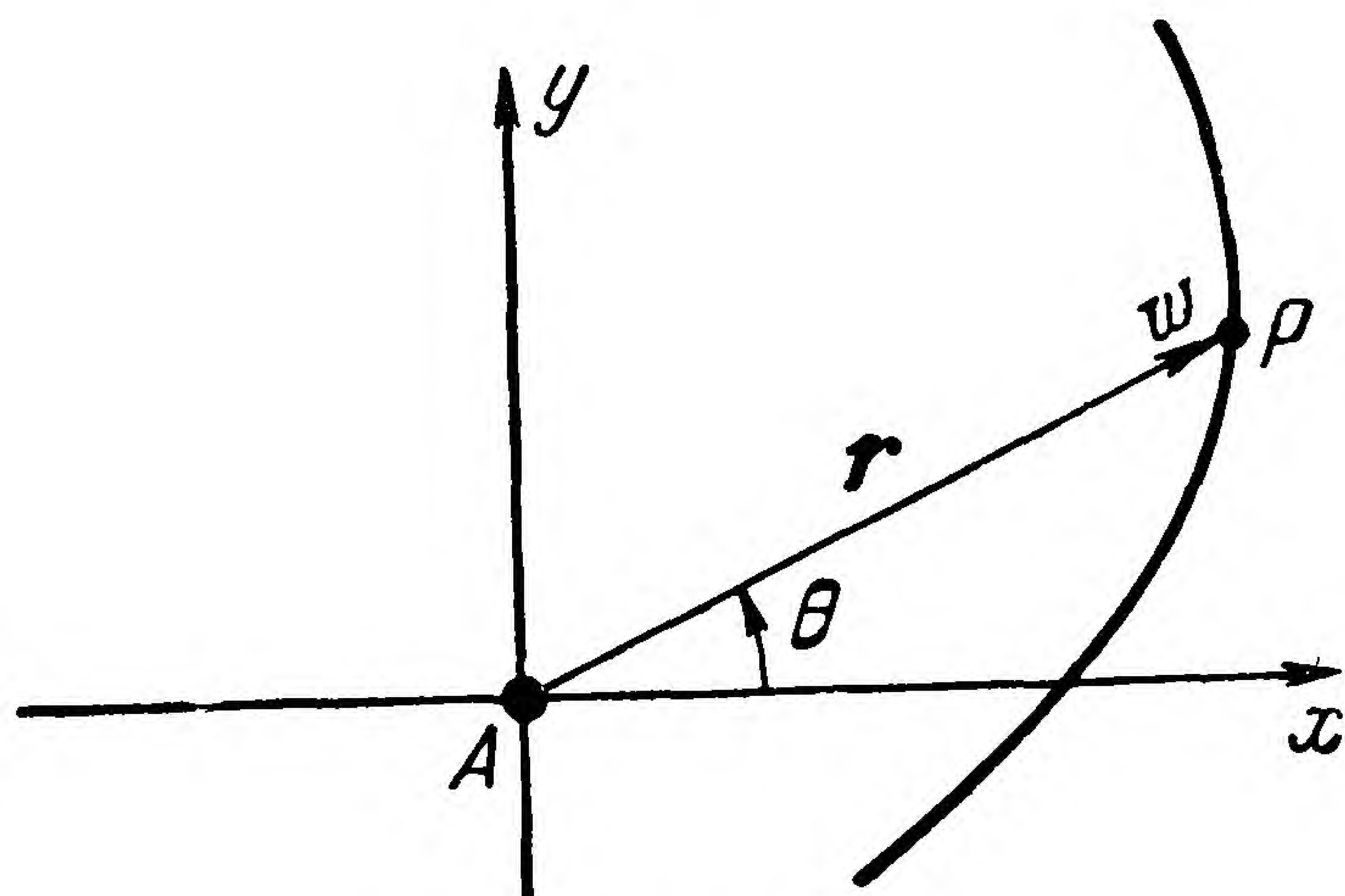


Рис. 2.17.

Введем для спутника P вместо двух вещественных координат x, y одну комплексную координату $w = x + iy$. Тогда два уравнения (1) объединяются в одно:

$$\ddot{w} = -K\frac{w}{r^3}, \qquad (2)$$

где $r = |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Интеграл площадей. Умножая (2) на $\bar{w}$ ($\bar{w} = x - iy$), получим

$$\bar{w}\ddot{w} = -\frac{K}{r^3}w\bar{w},$$

или

$$\bar{w}\ddot{w} = -\frac{K}{r}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $\dot{w}\dot{\bar{w}}$:

$$\bar{w}\ddot{w} + \dot{w}\dot{\bar{w}} = -\frac{K}{r} + \dot{w}\dot{\bar{w}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\bar{w}\dot{w}) = -\frac{K}{r} + |\dot{w}|^2.$$

Но правая часть — всегда вещественное число. Поэтому мнимая часть

$$\operatorname{Im}\frac{d}{dt}(\bar{w}\dot{w}) = 0,$$

то есть *)

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = \sigma, \tag{3}$$

где σ — некоторая вещественная константа. Зависимость (3) между комплексной координатой спутника w и его скоростью $\dot{w}$ называют *интегралом площадей* (*в комплексной форме*). Вещественное число σ называют *константой площадей*. Так как $w = x + iy$, $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\bar{w} = x - iy$, то (3) можно записать так:

$$\operatorname{Im}[(x - iy)(\dot{x} + i\dot{y})] = \sigma.$$

Отсюда получаем *декартову форму интеграла площадей*

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \tag{4}$$

Запишем w в показательной форме **):

$$w = re^{i\theta}.$$

Отсюда

$$\bar{w} = re^{-i\theta}$$

и

$$\dot{w} = (\dot{r} + ir\dot{\theta})e^{i\theta}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = \operatorname{Im}[r(\dot{r} + ir\dot{\theta})] = r^2\dot{\theta},$$

и из (3) получаем полярную форму интеграла площадей

$$r^2\dot{\theta} = \sigma. \tag{6}$$

---

*) Легко проверить, что операция дифференцирования по вещественному переменному (t) перестановочна с операцией взятия мнимой (или вещественной) части и с операцией перехода к сопряженным переменным.

**) Воспользовавшись формулой Эйлера (см. § 8), любое комплексное число w, представленное в тригонометрической форме:

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

можно записать в так называемой показательной форме:

$$w = \rho e^{i\varphi}.$$

Движение спутника прямое (по определению), если $\sigma > 0$, и обратное, если $\sigma < 0$. При $\sigma = 0$ имеем $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \text{const}$, а это значит, что спутник движется по лучу, исходящему из притягивающего центра. Для определенности всюду в дальнейшем ограничимся случаем $\sigma > 0$. Тогда $\dot{\theta} > 0$, θ монотонно возрастает, радиус-вектор спутника вращается вокруг притягивающего центра против часовой стрелки. Формулу (5) запишем так:

$$\dot{w} = \dot{r}e^{i\theta} + r\dot{\theta}\,(ie^{i\theta}). \tag{7}$$

Число $e^{i\theta}$ изображает орт радиуса-вектора спутника; вектор $ie^{i\theta} \equiv e^{i(\theta+\pi/2)}$ — тоже единичный, он получается из вектора $e^{i\theta}$ поворотом на $+90°$. В каждый данный момент времени вектор $e^{i\theta}$ определяет некоторую ось, проходящую через спутник, а именно ту ось, на которой лежит этот вектор и которая одинаково направлена с ним. Мы ее назовем *радиальной* осью. С течением времени радиальная ось поворачивается вокруг начала координат. Вектор $ie^{i\theta}$ тоже определяет в каждый момент времени некоторую ось, проходящую через спутник,— ту, на которой лежит этот вектор и которая одинаково направлена с ним. Эту ось назовем *трансверсальной* осью. Величину v_r проекции вектора скорости спутника $\dot{w}$ на радиальную ось называют в механике радиальной компонентой скорости, а величину v_n проекции вектора $\dot{w}$ на трансверсальную ось — трансверсальной (или поперечной) компонентой скорости. Из формулы (7) видно, что

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}. \tag{8}$$

Поэтому интеграл площадей приобретает вид

$$rv_n = \sigma, \tag{9}$$

или

$$r\,v \sin\varphi = \sigma, \tag{10}$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\dot{w}$.

3. Интеграл энергии. Из дифференциального уравнения (2)

$$\ddot{w} = -K\frac{w}{r^3}$$

(здесь $r = |w|$) следует, что

$$\dot{\bar{w}}\ddot{w} = -K\frac{w\dot{\bar{w}}}{r^3}.$$

Это равенство остается в силе, если в нем все величины заменить им сопряженными, так что $\dot{w}\ddot{\bar{w}} = -K\frac{\bar{w}\dot{w}}{r^3}$. Следовательно,

$$\dot{\bar{w}}\ddot{w} + \dot{w}\ddot{\bar{w}} = -\frac{K}{r^3}(w\dot{\bar{w}} + \dot{w}\bar{w}),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{\bar{w}}\dot{w}) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(w\cdot\bar{w}).$$

Но

$$w\bar{w} = |w|^2 = r^2,\ \dot{w}\dot{\bar{w}} = |\dot{w}|^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2) = -\frac{2K}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{r}\right).$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{2K}{r} + h, \tag{11}$$

где h — вещественная константа (константа энергии).

4. Интеграл Лапласа. Из полученных ранее формул

$$\ddot{w} = -Kw/r^3 \text{ и } \sigma = r^2\dot{\theta}$$

следует, что

$$-i\sigma\ddot{w} = i\frac{Kw}{r^3}(r^2\dot{\theta}) = Ke^{i\theta}\dot{\theta},$$

или

$$\frac{d}{dt}(-i\sigma\dot{w}) = \frac{d}{dt}(Ke^{i\theta}),$$

откуда

$$-i\sigma\dot{w} - Ke^{i\theta} = \Lambda, \tag{12}$$

где Λ — некоторая комплексная константа (константа Лапласа); соответствующий ей вектор называют вектором

Лапласа. Формула (12) называется «интегралом Лапласа в комплексной форме».

5. Уравнение орбиты спутника. Вектор Лапласа можно записать в показательной форме:

$$\Lambda = \lambda e^{i\theta_0},$$

где $\lambda = |\Lambda| \geqslant 0$, а θ_0 — угол наклона вектора Λ к вещественной оси.

Интеграл Лапласа остается справедливым при *любом* выборе направления вещественной оси. Выберем это направление таким образом, чтобы оно совпало с направлением вектора Лапласа Λ. Тогда $\theta_0 = 0$, и интеграл Лапласа принимает вид

$$-i\sigma\dot{w} - Ke^{i\theta} = \lambda. \tag{13}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\dot{w} = \left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)e^{i\theta}.$$

Подставив это значение для $\dot{w}$ в (13), найдем:

$$-i\sigma\left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)e^{i\theta} - Ke^{i\theta} = \lambda,$$

или

$$-i\sigma\dot{r} + \frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda e^{-i\theta}. \tag{14}$$

Приравнивая вещественные части обеих частей равенства (14), получим:

$$\frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda\cos\theta, \tag{15}$$

откуда при $\sigma \neq 0$

$$r = \frac{\sigma^2/K}{1 + \frac{\lambda}{K}\cos\theta}. \tag{16}$$

Используя обозначения

$$p = \sigma^2/K,\ \varepsilon = \lambda/K, \tag{17}$$

приведем уравнение (16) к виду

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \qquad (18)$$

А это и есть уравнение эллипса, гиперболы или параболы (в полярных координатах).

6. Связь между константами K, λ, σ, h. Докажем формулу

$$\lambda = \sqrt{K^2 + h\sigma^2}. \qquad (19)$$

Обозначим через $\operatorname{Re} u$ действительную часть комплексного числа u. Воспользуемся таким легко проверяемым тождеством, справедливым для любых комплексных чисел:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2). \qquad (20)$$

Из (13) следует, что

$$\lambda^2 = |i\sigma\dot{w} + Ke^{i\theta}|^2 = \sigma^2 v^2 + K^2 + 2\operatorname{Re}(i\sigma\dot{w}Ke^{-i\theta}) =$$

$$= \sigma^2 v^2 + K^2 + 2\operatorname{Re}\left[i\sigma K\left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)\right] =$$

$$= K^2 + \sigma^2 v^2 - 2\frac{\sigma^2 K}{r}.$$

Но $v^2 - 2K/r = h$. Поэтому $\lambda^2 = K^2 + \sigma^2 h$. Из (17) и (19) следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \qquad (21)$$

7. Скорость спутника и ее компоненты. Из интеграла Лапласа (13) получаем (при $\sigma \neq 0$) формулу для вектора скорости

$$\dot{w} = \frac{i}{\sigma}(\lambda + Ke^{i\theta}). \qquad (22)$$

Так как $\lambda = K\varepsilon$, то

$$\dot{w} = i\frac{K}{\sigma}(\varepsilon + e^{i\theta}), \qquad (23)$$

$$v^2 = |\dot{w}|^2 = \left(\frac{K}{\sigma}\right)^2 |\varepsilon + e^{i\theta}|^2.$$

Используя тождество (20), получим

$$v^2 = \left(\frac{K}{\sigma}\right)^2 (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\theta). \tag{24}$$

Так как $\sigma^2 = Kp$, то $(K/\sigma)^2 = K/p$. При $\sigma > 0$ $K/\sigma = +\sqrt{K/p}$. Из (23) и (24) следует, что

$$\dot{w} = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon + e^{i\theta}), \tag{25}$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{p}}\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\theta}. \tag{26}$$

Из (7) и (8) видно, что скорость спутника $\dot{w}$ может быть выражена через ее радиальную и трансверсальную компоненты v_r и v_n по формуле

$$\dot{w} = v_r e^{i\theta} + v_n i e^{i\theta}. \tag{27}$$

Сравнивая две формулы для скорости спутника (25) и (27), получим:

$$(v_r + iv_n)\, e^{i\theta} = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon + e^{i\theta}),$$

$$v_r + iv_n = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon e^{-i\theta} + 1) = i\sqrt{\frac{K}{p}}\,[1 + \varepsilon\cos\theta - i\varepsilon\sin\theta].$$

Отсюда

$$v_r = \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \quad v_n = \sqrt{\frac{K}{p}}(1 + \varepsilon\cos\theta). \tag{28}$$

8. Годограф скорости. Формулу (25) можно переписать так:

$$\dot{w} = i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{p}} + \sqrt{\frac{K}{p}}\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{29}$$

Отсюда видно, что точка $\dot{w}$ всегда лежит на окружности γ (рис.2.18) с центром $i\varepsilon\sqrt{K/p}$ и радиусом $\sqrt{K/p}$.

Действительно,

$$\left|\dot{w} - i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{p}}\right| = \sqrt{\frac{K}{p}}. \tag{30}$$

Найдем скорость $\dot{w}$ спутника в тот момент, когда его истинная аномалия равна θ. Формула (29) показывает, каким образом получить вектор скорости $\dot{w}$. Для этого следует (рис. 2.18) провести через центр $i\varepsilon\sqrt{K/p}$ окружности γ

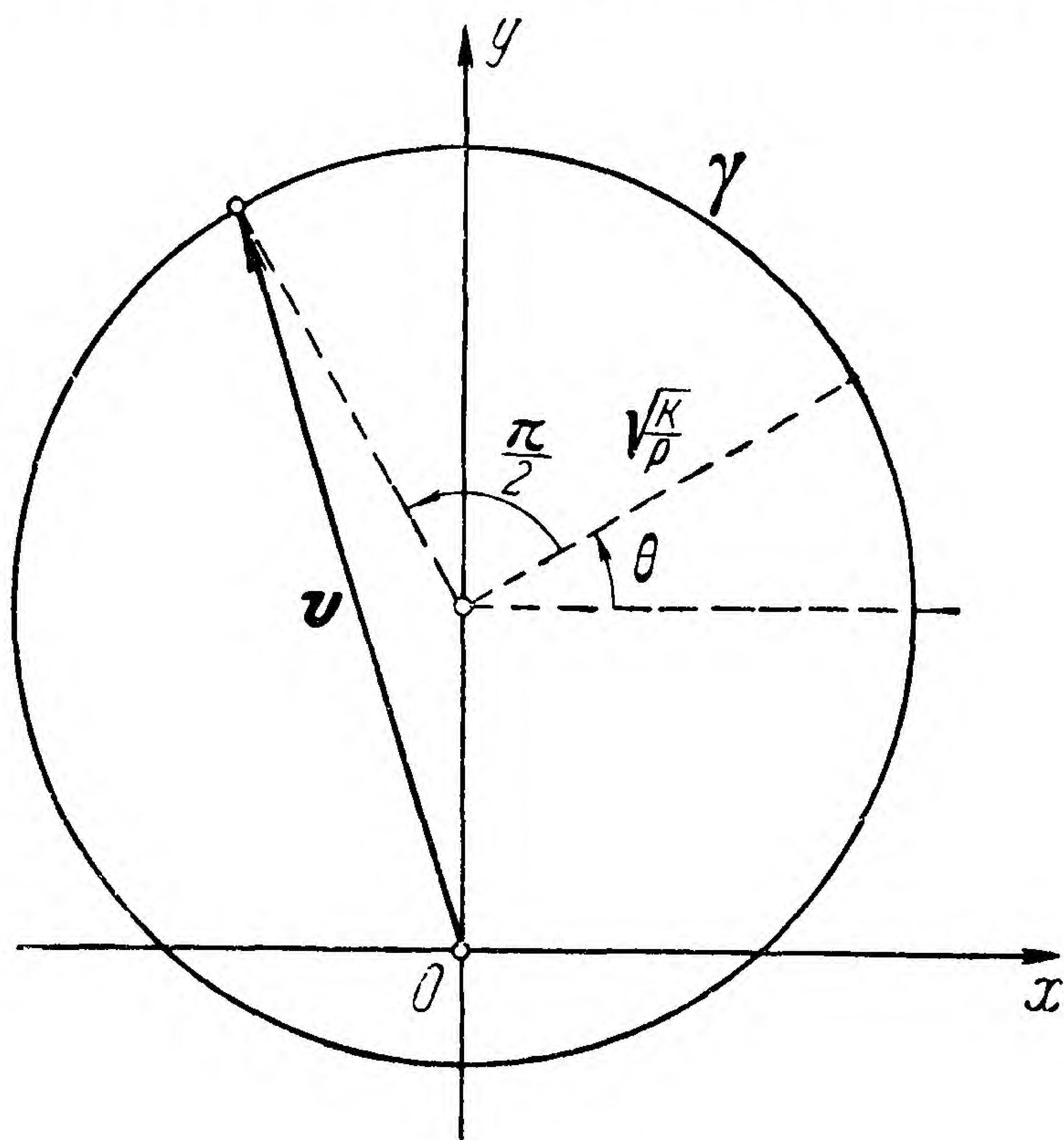


Рис. 2.18.

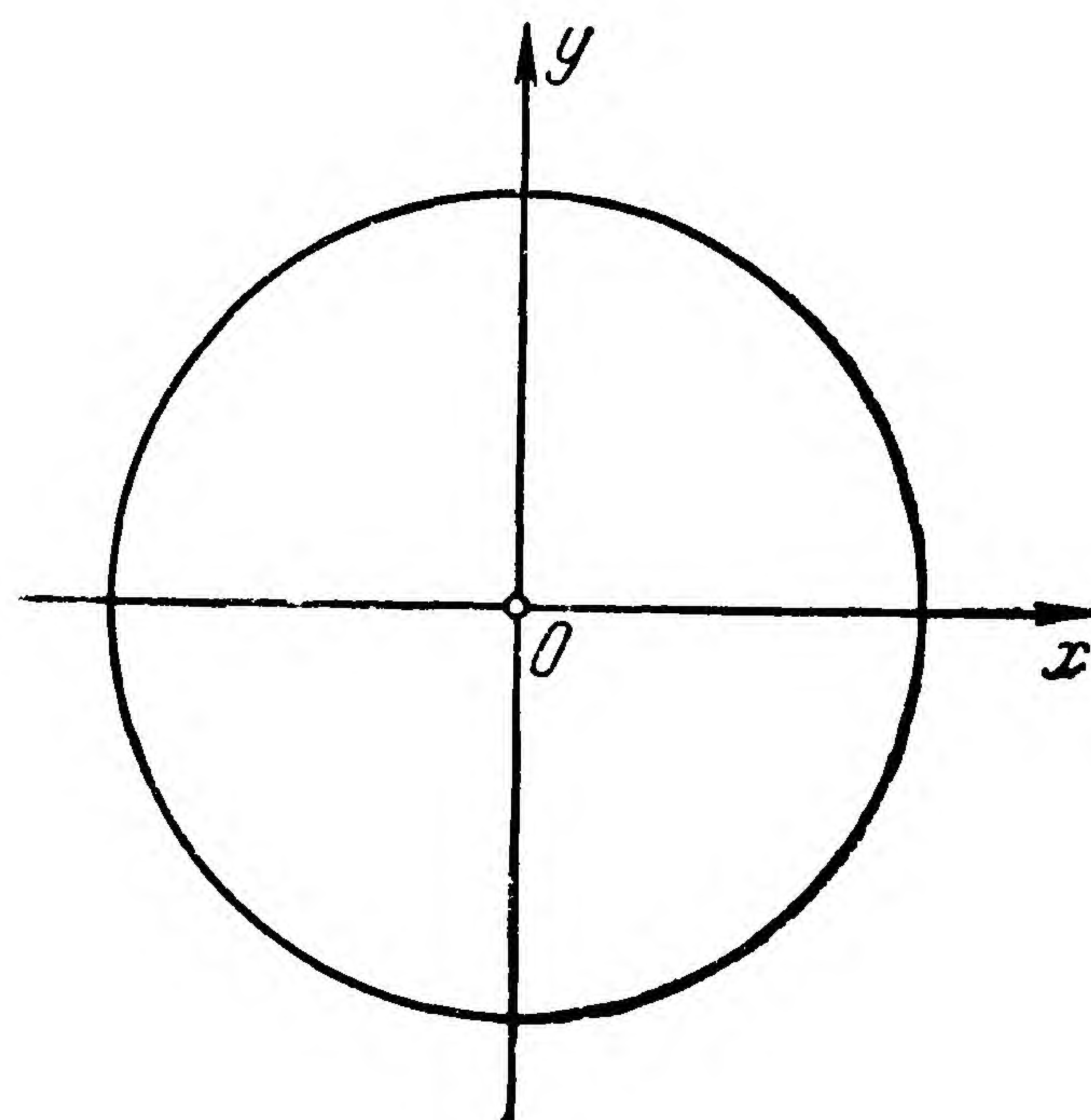


Рис. 2.19.

радиус, образующий угол $\theta + \pi/2$ с вещественной осью Ox. Вектор, идущий из начала координат O в конец этого радиуса, и есть искомый вектор скорости. На рис. 2.18— 2.21 изображены годографы скорости $\dot{w}$ для тех случаев, когда орбита — эллипс (рис. 2.18), окружность (рис. 2.19), парабола (рис. 2.20), гипербола (рис. 2.21).

9. Солнечный парус. Пусть космический корабль P массы m движется под действием двух сил: притягивающей силы массы M Солнца и отталкивающей силы солнечных лучей, давящих на парус корабля. Будем полагать, что парус плоский, его площадь равна s и нормаль к плоскости паруса в течение всего движения лежит в одной и той же плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{AP}$ (A — Солнце, P — корабль) и вектор скорости корабля $\boldsymbol{v}$.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат (рис. 2.17) и составим дифференциальное уравнение движения космолета. Сила притяжения космолета к Солнцу равна

$$\boldsymbol{F}_1 = -f\frac{Mm}{r^2}e^{i\theta}, \tag{31}$$

где θ — угол между вещественной осью Ox и радиусом-вектором космолета $\overrightarrow{AP}$. Через φ обозначим угол между

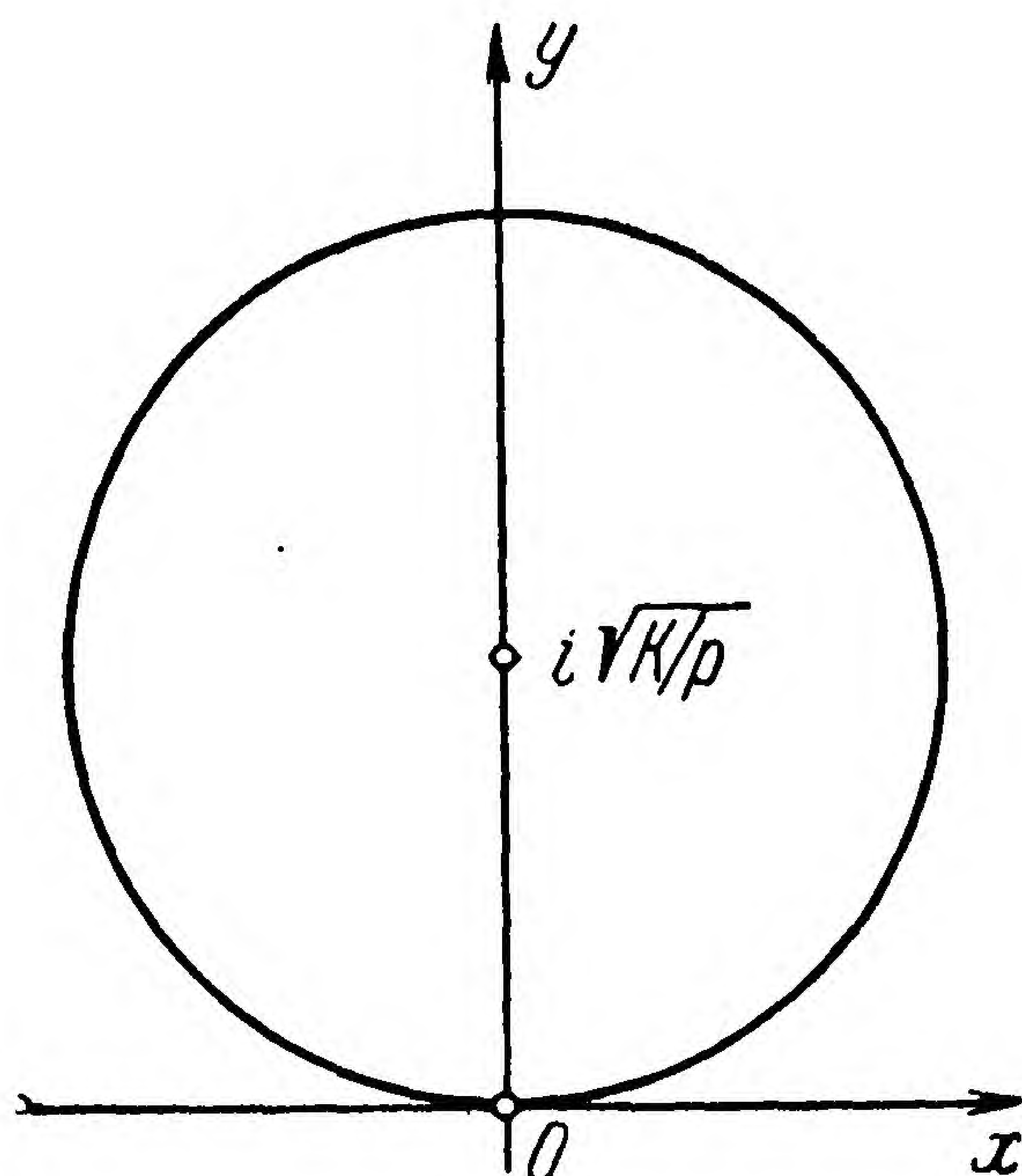


Рис. 2.20.

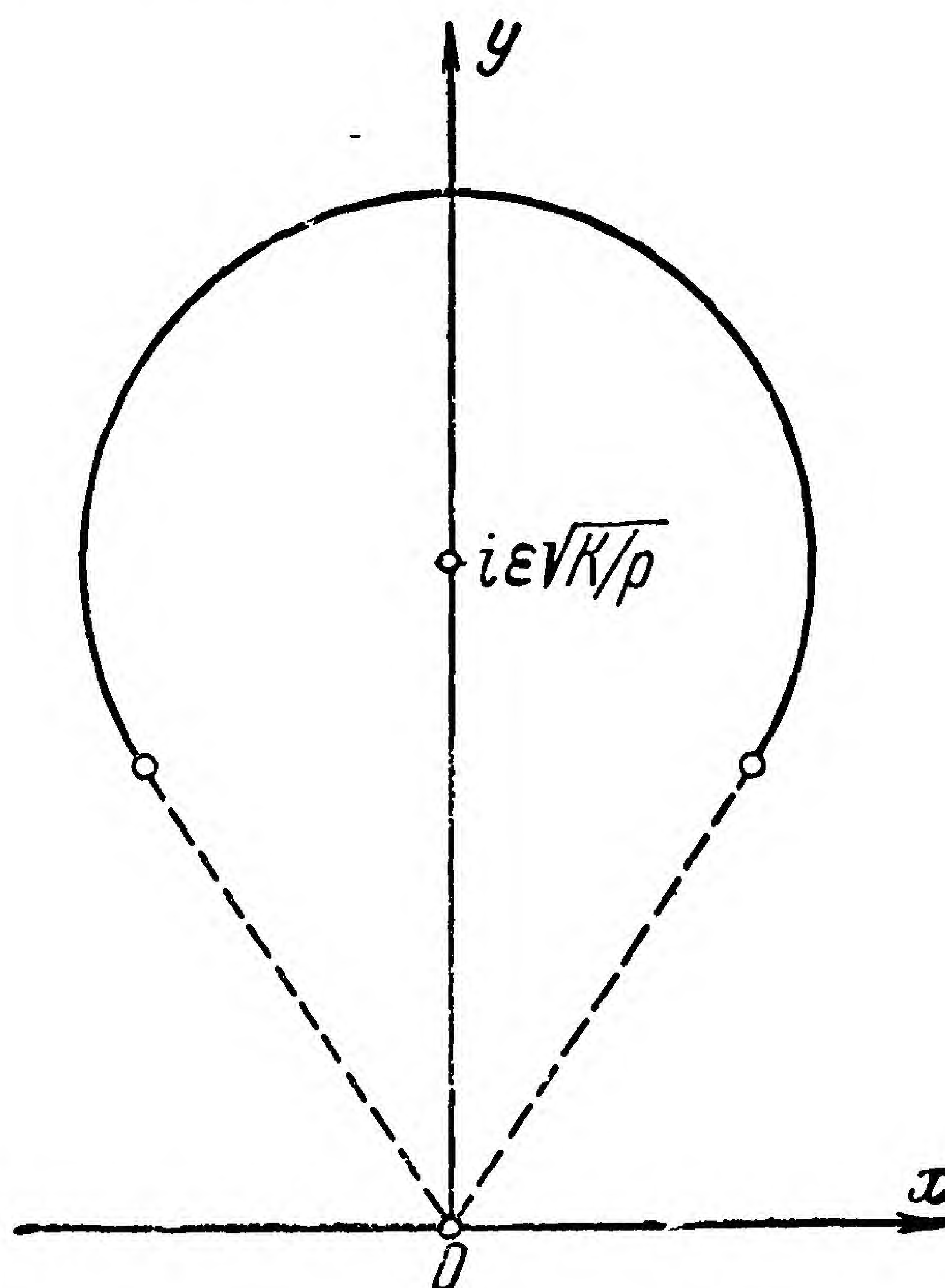


Рис. 2.21.

радиусом-вектором космолета $\overrightarrow{AP}$ и нормалью к плоскости паруса, а через α — постоянную солнечного давления (силу, с которой солнечные лучи давят на площадку в 1 $м^2$, когда последняя находится вблизи Земли). Тогда сила, с которой солнечные лучи давят на космолет, равна по величине

$$\frac{\alpha r_0^2 s}{r^2}\cos^2\varphi$$

и направлена под углом φ к радиусу-вектору $\overrightarrow{AP}$, то есть под углом $\theta+\varphi$ к вещественной оси, так что сила,

с которой солнечные лучи отталкивают космолет, равна

$$F_2 = \frac{\alpha r_0^2 s}{r^2} \cos^2 \varphi e^{i(\theta+\varphi)}. \tag{32}$$

По второму закону Ньютона

$$m\ddot{w} = F_1 + F_2 = -f \frac{Mm}{r^2} e^{i\theta} + \frac{\alpha r_0^2 s}{r^2} e^{i(\theta+\varphi)} \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$\ddot{w} = -\left[fM - \frac{\alpha r_0^2 s}{m} \cos^2 \varphi \, e^{i\varphi} \right] \frac{e^{i\theta}}{r^2}. \tag{33}$$

Введем обозначение

$$K = fM - \frac{\alpha r_0^2 s}{m} \cos^2 \varphi \, e^{i\varphi}. \tag{34}$$

Так как $w = re^{i\theta}$, то уравнение (33) принимает вид

$$\ddot{w} = -K \frac{w}{r^3}. \tag{35}$$

Это и есть дифференциальное уравнение плоского движения космолета с солнечным парусом. Здесь K — комплексная функция от времени. Внешне это уравнение не отличается от уравнения движения спутника в задаче двух тел. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ K — вещественная константа, и уравнение (35) интегрируется так же, как уравнение задачи двух тел (2). Если $\varphi \equiv \text{const} \neq \pi/2$ и $\varphi \neq 0$ (парус сохраняет ориентацию относительно радиуса-вектора космолета), то K — константа, и притом мнимая.

К сожалению, при интегрировании дифференциального уравнения задачи двух тел мы существенно опираемся на то, что параметр K — вещественное число. Поэтому ни интеграл площадей, ни интеграл энергии, ни интеграл Лапласа не остаются в силе для уравнения (35) при мнимом K. Однако и при мнимом K можно с помощью уравнений (34), (35) найти частные классы возможных траекторий космического аппарата с солнечным парусом.

Задачи

1. Логарифмическая спираль характеризуется в полярных координатах уравнением вида

$$r = r_0 e^{c\theta}.$$

Здесь θ — полярный угол, r — длина радиуса-вектора, c — тангенс угла между радиусом-вектором точки спирали и касательной к спирали. Покажите, что корабль с солнечным парусом, сохраняющим ориентацию относительно радиуса-вектора корабля, может двигаться по логарифмической спирали.

2. Космолет с массой 1000 *кг* прикреплен к плоскому солнечному парусу с массой 300 *кг*. Константа α солнечного давления для этого паруса составляет $9 \cdot 10^{-6}$ *н/м*^{2}, плотность парусного материала — 2 *г/м*^{2}. Парус постоянно ориентирован в пространстве так, что его нормаль образует угол $\varphi = 10^\circ$ с радиусом-вектором «Солнце — космолет». Космолет должен совершить перелет с орбиты Земли к орбите Марса. В качестве траектории полета выбрана логарифмическая спираль. Определите величину и направление начальной скорости космолета при отлете с орбиты Земли? Сколько времени займет перелет? Тяготением к Земле и Марсу пренебречь.

3. Каким образом можно было бы выбрать угол φ ориентации паруса, о котором говорится в предыдущей задаче, для того чтобы перелет был совершен по логарифмической спирали за кратчайшее время?

4. Решите задачу 2 в предположении, что перелет должен быть совершен к орбите Венеры.

ГЛАВА III

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА СПУТНИКА МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ ОРБИТЫ

§ 1. ПОЛЕТ ОТ ПЕРИЦЕНТРА

1. В предыдущей главе было показано, что движение спутника вокруг своего притягивающего центра A происходит все время в некоторой плоскости, проходящей через точку A.

В этой плоскости мы выбрали полярную систему координат с началом в притягивающем центре A и с полярной осью $A\Pi$, направленной в перицентр орбиты Π (рис. 2.8).

В каждый момент времени положение спутника характеризуется двумя его полярными координатами: истинной аномалией θ и длиной r радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$. Мы уже видели, что уравнение орбиты спутника имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \tag{1}$$

где p — фокальный параметр орбиты, а ε — ее эксцентриситет. Будем в дальнейшем считать известными параметры p, ε орбиты спутника и гравитационный параметр K притягивающего центра. Таким образом, мы можем считать известной орбиту спутника. Чтобы определить положение P спутника на орбите, достаточно найти истинную аномалию θ этой точки; расстояние $AP = r$ уже легко вычислить по формуле (1).

Обозначим через t_0 момент прохождения спутника через перицентр орбиты Π, а через t — момент его прохождения через точку P. Продолжительность перелета спутника от перицентра Π до точки P обозначим через τ:

$$\tau = t - t_0. \tag{2}$$

Нас будут интересовать две задачи.

З а д а ч а 1. Сколько времени потребуется спутнику для перелета по известной орбите от перицентра *П* до заданной точки *P* орбиты?

Таким образом, даны величины K, ε, p, θ (истинная аномалия точки P); требуется найти τ.

З а д а ч а 2. В какой точке *P* своей орбиты окажется спутник через τ единиц времени после прохождения через свой перицентр?

Таким образом, даны величины K, ε, p, τ. Ищется θ.

2. Искомую зависимость между величинами τ и θ (при данных K, ε, p) можно найти из уравнения орбиты спутника (1) и из интеграла площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma.$$

Отсюда

$$dt = \frac{r^2}{\sigma} d\theta.$$

Интегрируя это равенство по θ в пределах от 0 до θ, получим:

$$\tau = t - t_0 = \int_0^\theta \frac{r^2}{\sigma} d\theta = \frac{p^2}{\sigma} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}. \tag{3}$$

Интеграл в правой части — некоторая функция от θ. Она может быть выражена через θ посредством элементарных функций. Однако окончательный вид этого интеграла будет разным в трех случаях: $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon > 1$. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 1$ (полет по *параболической* орбите):

$$\tau = \frac{p^2}{\sigma} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{K}} \int_0^\theta \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$\tau = \sqrt{\frac{p^3}{K}} \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}\right). \tag{4}$$

Зная истинную аномалию θ какой-либо точки *P* параболической орбиты, можно по этой формуле вычислить, сколько времени (τ) потребуется спутнику для полета от

перицентра до этой точки. Заметим, что и, наоборот, для каждого момента t можно с помощью уравнения (4) найти соответствующее значение истинной аномалии θ точки P, в которой будет находиться в этот момент спутник, если он находился в перицентре в момент t_0. Для этой цели, как видно из формулы (4), следует сначала решить кубическое уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

Пользуясь уравнением параболической орбиты, можно время перелета по дуге ΠP выразить также через расстояния спутника от притягивающего центра в начале и конце перелета. Действительно, в случае параболы

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{p}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}=\frac{p}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2r}{p}-1},\quad 1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2r}{p}+2\right).$$

Поэтому

$$\tau=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{p^3}{K}}\left(\frac{2r}{p}+2\right)\sqrt{\frac{2r}{p}-1},$$

то есть

$$\tau=\frac{1}{3}(r+p)\sqrt{(2r-p)/K}. \tag{5}$$

При помощи этой формулы можно определить, сколько времени занимает перелет спутника по параболической орбите от перицентра до точки, отстоящей на расстоянии r от притягивающего центра.

3. В случае *эллиптической орбиты малого эксцентриситета* можно из формулы (3) получить достаточно удобную для практических целей зависимость между продолжительностью перелета (от перицентра до какой-либо точки P орбиты) и полярными координатами этой точки.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-q^3+\ldots\quad(|q|<1).$$

Продифференцировав его почленно, найдем

$$\frac{1}{(1+q)^2} = 1 - 2q + 3q^2 - \ldots,$$

или

$$\frac{1}{(1+q)^2} = 1 - 2q + q^2\,O\,(q),$$

где $O\,(q)$ — некоторая функция от q, которая остается ограниченной по абсолютной величине при $q \to 0$. Полагая $q = \varepsilon \cos \theta$, получим:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = 1 - 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2 O\,(\varepsilon).$$

Поэтому из (3) следует

$$\tau = \frac{p^2}{\sigma}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta) + \varepsilon^2 O\,(\varepsilon).$$

Пренебрегая членами, содержащими ε^2, получим:

$$\tau \approx \frac{p^2}{\sigma}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta). \tag{6}$$

Положим в этом равенстве $\theta = 2\pi$; тогда $\tau = T$, где T — период обращения спутника вокруг притягивающего центра. В этом случае формула (6) дает:

$$T \approx \frac{p^2}{\sigma}2\pi. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что при любом θ

$$\tau \approx \frac{T}{2\pi}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta). \tag{8}$$

Точным вычислением интеграла (3) при $\varepsilon \neq 1$ мы займемся в следующем параграфе.

Задачи

1. Ракета получила на высоте 230 *км* над поверхностью Земли параболическую скорость в горизонтальном направлении. Через некоторое время она достигла орбиты Луны (оказалась на расстоянии 384 000 *км* от центра Земли). Сколько времени занял этот перелет?

2. Космическая ракета (P) двигалась вокруг Солнца (S) по круговой орбите, близкой к орбите Земли ($SP \approx 150 \cdot 10^6$ *км*). Благодаря непродолжительному включению ракетного двигателя скорость ракеты изменилась и стала параболической, причем вектор этой скорости оказался расположенным в плоскости орбиты Нептуна и направленным перпендикулярно к радиусу-вектору ракеты SP. Сколько времени потребуется затем ракете для полета с выключенным двигателем до орбиты Нептуна? Орбиту Нептуна можно считать окружностью, радиус которой равен 30,1 а. е.

3. Корабль-спутник, выведенный на околоземную орбиту, имеет такие параметры: высота в перигее $H_\pi = 180$ *км*, высота в апогее $H_\alpha = 340$ *км*, момент t_0 прохождения через перицентр — 9 часов 00 минут по московскому времени. На первом же витке должно быть включено тормозное устройство, которое позволит кораблю приземлиться в заранее указанном районе. Предварительные расчеты показали, что для этой цели следует включить тормозное устройство в тот момент, когда истинная аномалия корабля составит 270°. В какой момент времени t_1 следует включить тормозное устройство?

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе мы займемся определением промежутка времени, необходимого для перелета спутника по известной эллиптической или гиперболической орбите от перицентра до заданной точки орбиты P.

Мы видели, что это время τ выражается определенным интегралом через истинную аномалию θ точки P. Ниже мы убедимся, что продолжительность полета τ значительно проще выражается через другой параметр, Z, характеризующий положение точки P. Напомним (см. главу II, § 8), что уравнения

$$x = a \cos Z, \quad y = b \sin Z \tag{1}$$

задают в параметрической форме:

а) *эллипс* (рис. 2.9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

если $a > b > 0$ и Z пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞ или от произвольного d до $d + 2\pi$;

б) *левую ветвь гиперболы* (рис. 2.10)

$$\frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1, \tag{3}$$

если $a = -|a|$, $b = -i|b|$, $Z = iH$, где H пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Пусть орбита спутника P задана уравнениями вида (1). В каждый момент времени t положение спутника вполне определено, если задано соответствующее число Z, называемое *эксцентрической аномалией*. Например, если в какой-то момент t_0 эксцентрическая аномалия Z равна 0, то спутник имеет координаты $(a, 0)$, то есть находится в перицентре Π своей орбиты.

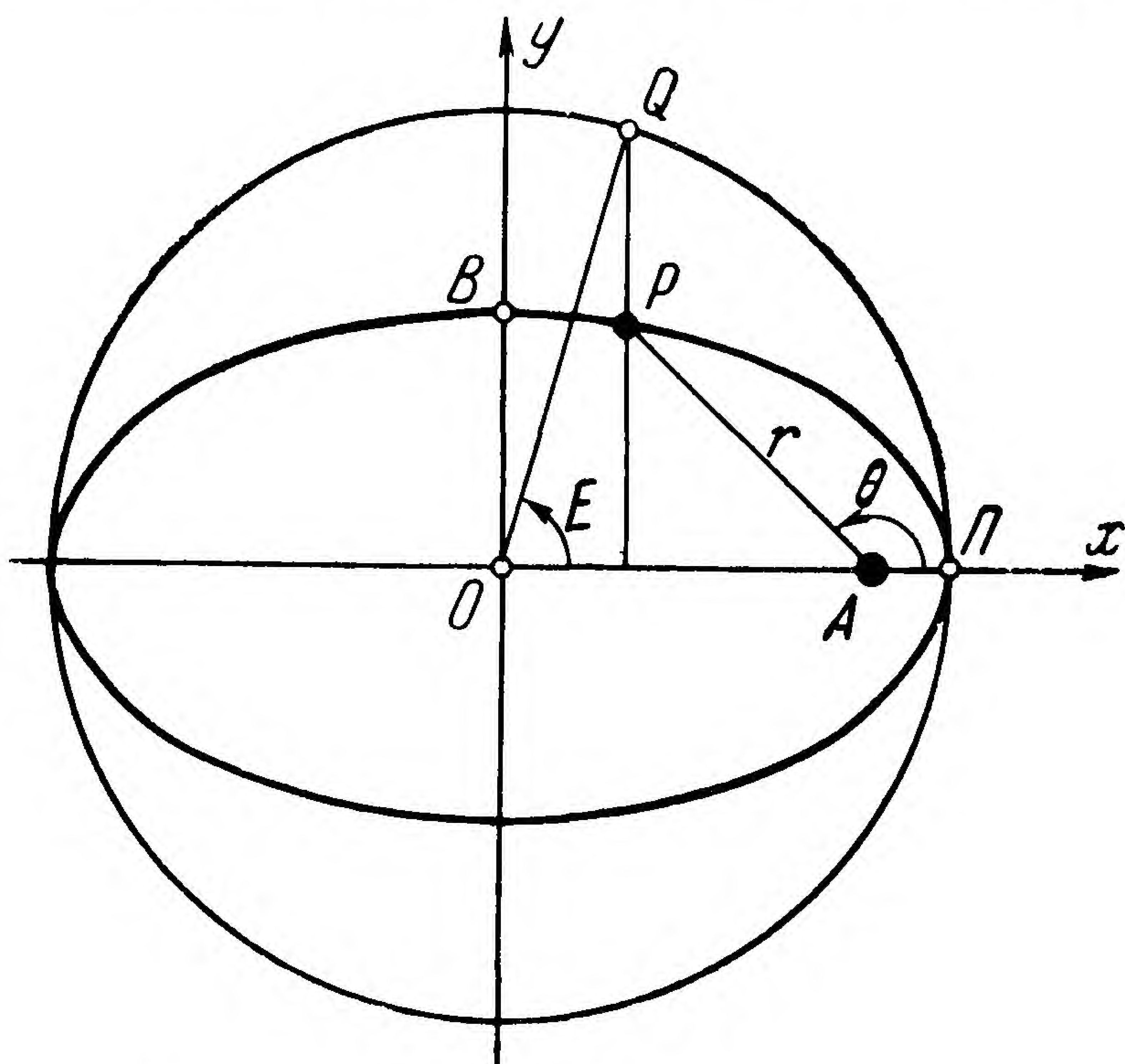


Рис. 3.1.

Эксцентрическая аномалия спутника P допускает в случае эллипса простое геометрическое истолкование как радианная мера некоторого угла (рис. 3.1). Построение этого угла, обозначаемого в случае эллиптического движения через E, достаточно ясно из рисунка *).

Так как притягивающий центр A имеет координаты $(c, 0)$ (см. главу II, § 8), а точка P имеет координаты $(a\cos Z$, $b\sin Z)$, то можно выразить длину r радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$ спутника P через эксцентрическую аномалию Z:

$$r^2 = AP^2 = (a\cos Z - c)^2 + (b\sin Z)^2.$$

Используя равенства

$$c = \varepsilon a,\ b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

после элементарной выкладки получим

$$r = |a(1 - \varepsilon\cos Z)|.$$

*) В случае гиперболической орбиты можно эксцентрическую аномалию Z представить в виде $Z = iH$ и числу H тоже можно дать геометрическое истолкование, а именно рассматривать его как площадь некоторого гиперболического сектора. Но мы на этой интерпретации останавливаться не будем, ибо она мало полезна.

Но выражение под знаком модуля всегда положительно — как в случае эллипса ($a > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $|\cos Z| = |\cos E| \leqslant 1$), так и в случае гиперболы ($a < 0$, $\varepsilon > 1$, $\cos Z = \cos iH = \operatorname{ch} H \geqslant 1$). Поэтому

$$r = a(1 - \varepsilon \cos Z). \tag{4}$$

2. Пусть спутник в момент t_0 находился в своем перицентре Π, а в момент t пришел в точку P, имеющую эксцентрическую аномалию Z. Приступим к выводу формулы, выражающей продолжительность перелета по пути ΠP через Z.

В каждый момент времени t величина Z связана с величиной r с помощью формулы (4), а r и t связаны между собой зависимостью [см. (2.6.1)]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sigma}{p} \varepsilon \sin \theta. \tag{5}$$

В последнюю зависимость входит ненужная для наших целей величина θ. Но ордината y точки P в любой момент времени t равна $b \sin Z$; и в то же время она равна $r \sin \theta$, так что

$$r \sin \theta = b \sin Z. \tag{6}$$

Исключив из равенств (4) — (6) r и θ, мы и найдем интересующую нас зависимость между Z и t. Для этой цели продифференцируем тождество (4):

$$\frac{dr}{dt} = a\varepsilon \sin Z \frac{dZ}{dt}. \tag{7}$$

Из формул (5) — (7) следует, что

$$r \frac{dZ}{dt} = \frac{b}{a} \frac{\sigma}{p} = \frac{b}{a} \sigma \frac{a}{b^2} = \frac{\sigma}{b}.$$

Так как $r = a(1 - \varepsilon \cos Z)$, то получим

$$(1 - \varepsilon \cos Z) \frac{dZ}{dt} = \frac{\sigma}{ab},$$

или

$$\frac{d}{dt}(Z - \varepsilon \sin Z) = n, \tag{8}$$

где

$$n = \sigma / ab. \tag{9}$$

Из (8), очевидно, следует, что

$$Z - \varepsilon \sin Z = n\,(t - t_0), \tag{10}$$

или

$$Z - \varepsilon \sin Z = n\tau. \tag{10'}$$

Последнее уравнение называется *уравнением Кеплера* для эллиптического и гиперболического движения.

Преобразуем выражение для n. Так как мы условились ограничиться случаем прямого движения спутника ($\sigma > 0$), то $\sigma = \sqrt{Kp}$ и

$$|n| = \frac{\sigma}{|a|\,|b|} = \frac{1}{|a|\,|b|}\sqrt{Kp} = \frac{\sqrt{K}}{|a|\,|b|}\sqrt{\frac{|b|^2}{|a|}},$$

то есть

$$|n| = \sqrt{K/|a|^3}. \tag{11}$$

В случае эллипса

$$a > b > 0,\ n = |n|. \tag{12}$$

В случае гиперболы

$$a = -|a|,\ b = -i|b|,\ n = -i|n|. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (11) и (12) с (2.10.4) и (2.10.3), убеждаемся в том, что в случае эллиптического движения n есть средняя угловая скорость движения спутника по орбите, то есть его среднее движение.

Запишем основные из полученных сейчас формул в таком виде, в котором они обычно встречаются в литературе. Полагая $Z = E$ в случае эллипса и $Z = iH$ в случае гиперболы, из (4) и (10) — (13) получим:

для эллиптического движения

$$r = a\,(1 - \varepsilon \cos E), \tag{14}$$

$$n = \sqrt{K/a^3}, \tag{15}$$

$$E - \varepsilon \sin E = n\,(t - t_0); \tag{16}$$

для гиперболического движения

$$r = |a|(\varepsilon \operatorname{ch} H - 1), \qquad (17)$$

$$|n| = \sqrt{K/|a^3|}, \qquad (18)$$

$$\varepsilon \operatorname{sh} H - H = |n|(t - t_0). \qquad (19)$$

Величину $M = n(t - t_0)$ в случае *эллиптического* движения обычно называют *средней аномалией* спутника. Она имеет простой механический смысл: это радианная мера дуги, которую описал бы между моментами t_0 и t фиктивный, воображаемый спутник Ф, если бы он двигался равномерно с угловой скоростью n.

3. Связь между эксцентрической аномалией Z и истинной аномалией θ следует из формул

$$r = \frac{p}{(1 + \varepsilon \cos\theta)}, \; r = a(1 - \varepsilon \cos Z) \text{ и } p = a(1 - \varepsilon^2).$$

Отсюда получим:

$$1 - \varepsilon \cos Z = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos\theta}. \qquad (20)$$

Пользуясь формулой (20), легко вычислить последовательно значения для $\cos\theta$, $1 - \cos\theta$, $1 + \cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta/2$:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2}. \qquad (21)$$

Задачи

1. Космолет при выходе на эллиптическую орбиту относительно Земли на высоте 230 *км* имеет начальную скорость $V_0 = 10{,}95$ *км/сек*. Вектор скорости в этот момент направлен параллельно поверхности Земли и лежит в плоскости лунной орбиты. Найдите время полета космолета до орбиты Луны, считая, что Луна движется вокруг Земли по окружности радиуса $r = 384\,400$ *км*.

2. Решите предыдущую задачу в предположении, что $V_0 = 12{,}0$ *км/сек*.

3. В начале рассматриваемого участка перелета спутник Солнца находился в своем перигелии, в конце участка — на расстоянии r от центра Солнца. При этом радиус-вектор спутника повернулся меньше чем на пол-оборота вокруг Солнца. Сколько времени (τ) занял перелет? Дайте явное выражение τ через ε, a, K, r (движение происходит на эллипсу).

4. Выразите скорость v спутника, движущегося по эллиптической или гиперболической орбите, и ее радиальную и поперечную составляющие v_r и v_n через K, a, ε, E (или соответственно H).

5. Орбита спутника — эллипс или гипербола. Известны параметры ε, a, K. Сколько времени (τ) займет перелет спутника от перицентра до точки с истинной аномалией θ?

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. Уравнением Кеплера (3.2.10) (в виде (3.2.16) или (3.2.19)) приходится пользоваться также в тех случаях, когда необходимо предсказать, где, в какой точке своей орбиты, будет находиться спутник в заранее указанный момент времени. В этом случае *дано* τ, искомыми же величинами являются эксцентрическая аномалия Z, а также две функции от эксцентрической аномалии: r и θ. Уравнение (3.2.10) является трансцендентным относительно Z.

Покажем сначала, что уравнение Кеплера — и в случае эллиптического движения ($0 < \varepsilon < 1$), и в случае гиперболического движения ($\varepsilon > 1$) — для каждого заданного τ имеет решение, и притом единственное.

а) *Эллиптическое движение.* Уравнение Кеплера может быть записано в виде

$$E - \varepsilon \sin E = M, \tag{1}$$

где $M = n\tau = n(t - t_0)$. Сначала предположим, что число M не делится нацело на π (то есть при любом целом k $M \neq k\pi$). Тогда можно подобрать такое целое число k, что

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(E) = E - \varepsilon \sin E. \tag{2}$$

Эта непрерывная функция монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, ибо

$$\frac{d\Phi}{dE} = 1 - \varepsilon \cos E = \frac{r}{a} > 0.$$

Поэтому $\Phi(E)$ принимает значение M *не более чем при*

одном значении E. Но $\Phi(k\pi) = k\pi < M$, $\Phi[(k+1)\pi] = (k+1)\pi > M$. Поэтому функция $\Phi(E)$ *не менее чем при одном* значении E из сегмента $[k\pi, (k+1)\pi]$ принимает значение M. Следовательно, при данном M $[k\pi < M < (k+1)\pi]$ существует в точности *одно* число E, для которого $\Phi(E) = M$, причем $k\pi < E < (k+1)\pi$.

Если $M = k\pi$ (опущенный ранее случай), то единственным корнем уравнения Кеплера (1) будет число $E = M$.

Итак, уравнение (1) определяет для каждой пары чисел ε и M $(0 < \varepsilon < 1, -\infty < M < \infty)$ единственное число E, то есть неявно задает некоторую *однозначную* функцию $E = E(\varepsilon, M)$.

б) *Гиперболическое движение* $(\varepsilon > 1)$. В этом случае уравнение Кеплера приводимо к виду (3.2.19):

$$\varepsilon \operatorname{sh} H - H = M, \tag{3}$$

где $M = |n|(t - t_0)$. Функция

$$\Psi(H) = \varepsilon \operatorname{sh} H - H \tag{4}$$

монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, ибо $\Psi'(H) = \varepsilon \operatorname{ch} H - 1 > 0$ ($\varepsilon > 1$ и, кроме того, при любом H $\operatorname{ch} H \geqslant 1$). Поэтому уравнение (3) имеет (при данном M) *не более одного корня* H. Кроме того, при $H \to +\infty$

$$\Psi(H) \equiv (\varepsilon - 1) H + \frac{H^3}{3!} + \frac{H^5}{5!} + \ldots > (\varepsilon - 1) H \to \infty.$$

Поэтому найдется такое число H_2, что $\Psi(H_2) > M$. А при $H \to -\infty$ $\Psi(H) \to -\infty$, т. е. найдется такое значение H_1, что $\Psi(H_1) < M$. В силу непрерывности функция $\Psi(H)$ *по крайней мере при одном* значении H из сегмента $[H_1, H_2]$ принимает значение M. Следовательно, уравнение (3) имеет в точности *один* корень H.

Для решения уравнения Кеплера применяют приближенные методы. Если требуется найти корень уравнения Кеплера с небольшой точностью, то можно воспользоваться графическим способом. Корень E уравнения (1) можно, очевидно, найти как абсциссу точки пересечения двух линий: синусоиды $y = \sin E$ и прямой $y = (E - M)/\varepsilon$. Аналогично корень уравнения (3) можно получить как абсциссу точки встречи кривой $y = \operatorname{sh} H$ и прямой $y = (M + H)/\varepsilon$.

2. В современной математике разработаны эффективные методы нахождения корней трансцендентных уравнений с любой наперед заданной точностью. Эти методы дают возможность быстро решить (с любой требуемой точностью) такое сравнительно простое уравнение, каким является уравнение Кеплера.

В частности, для решения уравнения Кеплера часто пользуются так называемыми *итерационными методами*. В простейшем случае, который только и будет нас здесь интересовать, сущность итерационного метода заключается в следующем. Пусть уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет на каком-то интервале корень, и притом единственный; обозначим его через $\bar{x}$.

Строим по определенному рецепту (каждый итерационный метод характеризуется своим рецептом) для данной функции $\varphi(x)$ вспомогательную функцию $f(x)$ и с ее помощью — последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по формуле

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Например, для *итерационного метода Ньютона* функция $f(x)$ выбирается по формуле

$$f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}. \tag{6}$$

Что касается «нулевого приближения» x_0, то оно выбирается на основании прикидки (быть может, даже весьма грубой) или из каких-либо других соображений. Затем показывается, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к искомому корню $\bar{x}$.

Понятно, что функция $f(x)$ не может быть взята произвольно, а должна быть выбрана настолько удачно, чтобы на практике — при весьма общих предположениях — последовательность чисел $\{x_n\}$, порождаемая функцией $f(x)$, действительно сходилась к интересующему нас корню $\bar{x}$ уравнения $\varphi(x) = 0$.

Особенно важно получить оценку для погрешности n-го приближения x_n, то есть для величины $|\bar{x} - x_n|$.

Мы здесь рассмотрим применительно к уравнению Кеплера лишь один итерационный метод — метод неподвижной точки.

3. Метод неподвижной точки. Для решения по этому методу уравнение

$$\varphi(x) = 0 \tag{7}$$

заменяется равносильным ему уравнением вида *)

$$x = f(x). \tag{8}$$

После выбора нулевого приближения x_0 строится последовательность приближений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ по формулам

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n),\ \ldots \tag{9}$$

Если окажется, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу $\bar{x}$, а $f(x)$ — непрерывная функция в точке $\bar{x}$, то из (9) видно, что $\bar{x} = f(\bar{x})$. А это значит, что $\bar{x}$ как раз и будет корнем уравнения (7).

Применим метод неподвижной точки для решения уравнения Кеплера в случае *эллиптического* движения:

$$E = \varepsilon \sin E + M. \tag{10}$$

За нулевое приближение E_0 искомого корня $\bar{E}$ можно, например, принять число 0 или M, или какое-либо другое число. Последовательные приближения E_n к корню $\bar{E}$ будем вычислять по формуле

$$E_{n+1} = \varepsilon \sin E_n + M. \tag{11}$$

Например, при $E_0 = 0$

$$E_1 = M,\ E_2 = \varepsilon \sin M + M,\ E_3 = \varepsilon \sin E_2 + M,\ \ldots$$

Докажем, что *последовательность* $\{E_n\}$ *сходится при любом выборе начального приближения* E_0. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать сходимость ряда

$$E_0 + (E_1 - E_0) + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_2) + \ldots \\ \ldots + (E_{n+1} - E_n) + \ldots, \tag{12}$$

*) С записью (8) связано название метода: с помощью преобразования $y = f(x)$ «точка» x переходит в другую «точку» $f(x)$, и нас интересует такая «точка» $\bar{x}$, для которой $f(\bar{x}) = \bar{x}$, то есть такая «точка» $\bar{x}$, которая преобразуется функцией $y = f(x)$ сама в себя, или, как говорят, «остается неподвижной» при преобразовании $y = f(x)$.

частные суммы которого совпадают с членами последовательности $\{E_n\}$. При помощи (11) находим:

$$|E_{n+1}-E_n| = |\varepsilon\sin E_n - \varepsilon\sin E_{n-1}| =$$
$$= 2\varepsilon\left|\sin\frac{E_n-E_{n-1}}{2}\cos\frac{E_n+E_{n-1}}{2}\right| \leqslant \varepsilon|E_n-E_{n-1}| \qquad (13)$$

(ибо при любом вещественном α имеем $|\cos\alpha| \leqslant 1$, $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$). По формуле (13)

$$|E_2-E_1| \leqslant \varepsilon|E_1-E_0|,\ |E_3-E_2| \leqslant \varepsilon|E_2-E_1| \leqslant \varepsilon^2|E_1-E_0|.$$

И вообще, при любом n

$$|E_{n+1}-E_n| \leqslant \varepsilon^n|E_1-E_0|.$$

Итак, члены ряда (12), начиная со второго, не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов знакоположительной геометрической прогрессии

$$|E_1-E_0| + \varepsilon|E_1-E_0| + \varepsilon^2|E_1-E_0| + \ldots + \varepsilon^n|E_1-E_0| + \ldots,$$

которая сходится, ибо $0 < \varepsilon < 1$. Следовательно, и ряд (12) сходится, а вместе с ним — последовательность $\{E_n\}$. Пусть $\bar{E}$ — предел этой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bar{E}$. Переходя в (11) к пределу при $n\to\infty$, убедимся, что

$$\bar{E} = \varepsilon\sin\bar{E} + M,$$

то есть $\bar{E}$ — корень уравнения Кеплера (10).

Оценим погрешность n-го приближения E_n:

$$|\bar{E}-E_n| = |(E_{n+1}-E_n)+(E_{n+2}-E_{n+1})+(E_{n+3}-E_{n+2})+\ldots|$$
$$\leqslant |E_{n+1}-E_n| + |E_{n+2}-E_{n+1}| + |E_{n+3}-E_{n+2}| + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^n|E_1-E_0| + \varepsilon^{n+1}|E_1-E_0| + \varepsilon^{n+2}|E_1-E_0| + \ldots =$$
$$= \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}|E_1-E_0|,$$

то есть

$$|\bar{E}-E_n| \leqslant \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}|E_1-E_0|. \qquad (14)$$

Аналогично можно показать, что

$$|\bar{E} - E_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} |E_n - E_{n-1}|. \tag{15}$$

Таким образом, *при любом выборе нулевого приближения* E_0, даже очень грубом, мы после конечного числа шагов получим число E_n, которое будет — в пределах допустимой погрешности — равно корню уравнения Кеплера.

Аналогичные рассуждения могут быть применены и для широкого класса уравнений вида (8), а именно: *если в некоторой окрестности корня уравнения* (8) $|f'(x)| \leqslant N < 1$, *а нулевое приближение* x_0 *выбрано из этой окрестности, то последовательные приближения, построенные по формуле* (5), *сходятся к решению уравнения* (8), *причем погрешность* n*-го приближения можно оценить с помощью любой из двух формул*:

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{N^n}{1 - N} |x_1 - x_0|, \quad |x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{N}{1 - N} |x_n - x_{n-1}|. \tag{16}$$

4. Метод неподвижной точки не может быть применен к уравнению Кеплера для *гиперболического* движения (3), записанному в виде

$$H = \varepsilon \operatorname{sh} H - M.$$

Действительно, в этом случае при любом H

$$f'(H) \equiv (\varepsilon \operatorname{sh} H - M)' = \varepsilon \operatorname{ch} H > 1.$$

Однако этот метод может быть использован для решения уравнения (3), если воспользоваться функцией

$$y = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x,$$

обратной по отношению к функции

$$x = \operatorname{sh} y.$$

Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$H = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{H + M}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Полагая $f(H) = \operatorname{Ar\,sh} x$, где $x = (H + M)/\varepsilon$, и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найдем:

$$f'(H) = \frac{d}{dx}(\operatorname{Ar\,sh} x)\frac{dx}{dH} = \frac{dy}{dx}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

ибо $\operatorname{ch} y \geqslant 1$ при любом y.

Таким образом, условие сходимости итерационного процесса выполняется.

После выбора нулевого приближения H_0 можно находить последовательные приближения по формуле

$$H_{n+1} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{H_n + M}{\varepsilon}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{18}$$

Вычисления можно выполнить с помощью таблиц гиперболического синуса (см. [0.19]). Для оценки погрешности n-го приближения получим из (16) при $N = 1/\varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} |H_n - \overline{H}| &< \frac{1}{\varepsilon^{n-1}(\varepsilon - 1)}|H_1 - H_0|, \\ |H_n - \overline{H}| &< \frac{1}{\varepsilon - 1}|H_n - H_{n-1}|. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Заметим, что при эксцентриситете ε, близком к 1, метод неподвижной точки как для эллиптического, так и для гиперболического движений сходится медленно. В таких случаях применяют другие, более тонкие методы.

В настоящее время известны различные итерационные методы, с помощью которых можно успешно решать трансцендентные уравнения, в том числе и уравнение Кеплера. Итерационные методы особенно удобны для решения уравнений на быстродействующих вычислительных машинах. В самом деле, при решении задачи таким методом для нахождения каждого следующего приближения необходимо повторить один и тот же цикл вычислений (но с различными числами). Оказывается, легко составить такую программу для математической машины, при которой машина сама выберет необходимое число циклов и прекратит вычисление тогда, когда получится такое приближение, которое отличается от точного значения корня на величину, меньшую заданной допустимой погрешности.

Имеются разнообразные таблицы, дающие значение эксцентрической аномалии в зависимости от эксцентриситета ε и средней аномалии M. Таковы, например, таблицы Астранда, Баушингера, Виртца, М. Ф. Субботина, С. П. Глазенапа и др.

Задачи

1. Искусственный спутник Земли, запущенный в качестве зонда для исследования свойств космического пространства на расстоянии нескольких десятков тысяч километров от Земли, имел такие параметры: $a = 10^5$ *км*, $\varepsilon = 0{,}5$. Требуется предсказать значения эксцентрической аномалии E, истинной аномалии θ и расстояния r спутника от центра Земли через τ *мин* после прохождения спутника через перигей. E следует вычислить с точностью до 0,01 *рад*. Рассмотрите случаи $\tau = 50$ *мин*, $\tau = 300$ *мин*.

2. Искусственный спутник Земли имел перигей на расстоянии 6600 *км* от центра Земли (то есть примерно на высоте 230 *км* над поверхностью Земли), а апогей — на расстоянии 7400 *км* от центра Земли (то есть на высоте 1030 *км*). Спутник прошел через свой перигей в 4 часа по московскому времени. В 5 часов 20 минут было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента эксцентрическую аномалию E спутника, его истинную аномалию θ и высоту H над поверхностью Земли.

3. Советская автоматическая станция «Луна-4», запущенная в сторону Луны в 1963 году, после прохождения над Луной стала обращаться вокруг Земли по траектории, которая сначала была весьма близка к эллипсу. На первом витке максимальное удаление станции от центра Земли составляло 700 000 *км*, минимальное — 90 000 *км*. На каком расстоянии от центра Земли оказалась станция через двое суток после прохождения через перигей?

4. Межпланетный зонд (то есть автоматическая станция для исследования межпланетного пространства) стартует с искусственного спутника Земли. Ровно в 12 часов по московскому времени зонд оказался на высоте 630 *км* над поверхностью Земли, причем его скорость составляла 14,0 *км/сек* и была направлена параллельно поверхности Земли. Требуется дать прогноз: на каком расстоянии от центра Земли будет находиться зонд в 10 часов вечера того же дня?

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРБИТ, БЛИЗКИХ К КРУГОВЫМ

1. Уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = M \tag{1}$$

определяет E как неявную функцию от двух переменных M и ε:

$$E = E(\varepsilon, M).$$

При фиксированном M величина E будет функцией только от ε.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением орбит, близких к круговым. Для таких орбит эксцентриситет ε близок к нулю и поэтому можно получить простые приближенные формулы для расчета эксцентрической аномалии E и других параметров орбиты. Для любой дифференцируемой функции $f(\varepsilon)$ при малых ε, как известно из математического анализа, справедлива приближенная формула

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + \varepsilon f'(0). \qquad (2)$$

Положим в этой формуле

$$f(\varepsilon) = E(\varepsilon, M).$$

Из (1) следует, что при $\varepsilon = 0$ имеем $E = M$.

Дифференцируя соотношение (1) по ε (считая E функцией ε), получим

$$\frac{dE}{d\varepsilon} - \varepsilon \cos E \frac{dE}{d\varepsilon} - \sin E = 0.$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$, найдем:

$$\left(\frac{dE}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (\sin E)_{\varepsilon=0} = \sin M. \qquad (3)$$

Таким образом, применение формулы (2) в данном случае приводит к приближенной формуле

$$E \approx M + \varepsilon \sin M. \qquad (4)$$

2. Найдем теперь приближенную формулу для радиуса-вектора r. Как мы знаем,

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E). \qquad (5)$$

Из этой формулы видно, что для того, чтобы подсчитать r с точностью до первой степени ε, следует в (5) заменить $\cos E$ приближенным значением, верным с точностью до нулевой степени ε, то есть тем его значением, которое получается при $\varepsilon = 0$:

$$(\cos E)_{\varepsilon=0} = \cos M. \qquad (6)$$

Поэтому

$$r \approx a\,(1 - \varepsilon \cos M). \tag{7}$$

3. Выведем приближенную формулу для истинной аномалии θ. Согласно интегралу площадей

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma. \tag{8}$$

При помощи соотношения

$$M = n\,(t - t_0) \tag{9}$$

перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по M:

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{\sigma}{n}\,\frac{1}{r^2}. \tag{10}$$

Из уравнения Кеплера (1) имеем

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos E}. \tag{11}$$

Используя (5), получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\,\frac{dE}{dM} \tag{12}$$

Поэтому формулу (10) можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{\sigma}{na^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2, \tag{13}$$

или, так как

$$\sigma = \sqrt{Kp}, \quad p = a\,(1 - \varepsilon^2),\ n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}, \tag{14}$$

$$\frac{d\theta}{dM} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2. \tag{15}$$

Из (4) находим приближенную формулу

$$\frac{dE}{dM} \approx 1 + \varepsilon \cos M.$$

С точностью до первой степени ε справедливы формулы

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 \approx 1 + 2\varepsilon \cos M, \quad \sqrt{1-\varepsilon^2} \approx 1.$$

Поэтому из (15) имеем:

$$\frac{d\theta}{dM} \approx 1 + 2\varepsilon \cos M.$$

Интегрируя, получаем окончательно:

$$\theta \approx M + 2\varepsilon \sin M. \tag{16}$$

4. Выберем в плоскости орбиты прямоугольную систему координат следующим образом: за начало возьмем притягивающий центр A, за ось абсцисс — линию апсид (рис. 3.2). Ось ординат получается из линии апсид поворотом на $\pi/2$ радиан в направлении движения спутника. Такую систему координат называют *орбитальной*. Пусть в ней эллиптический спутник P имеет координаты (ξ, η). Тогда

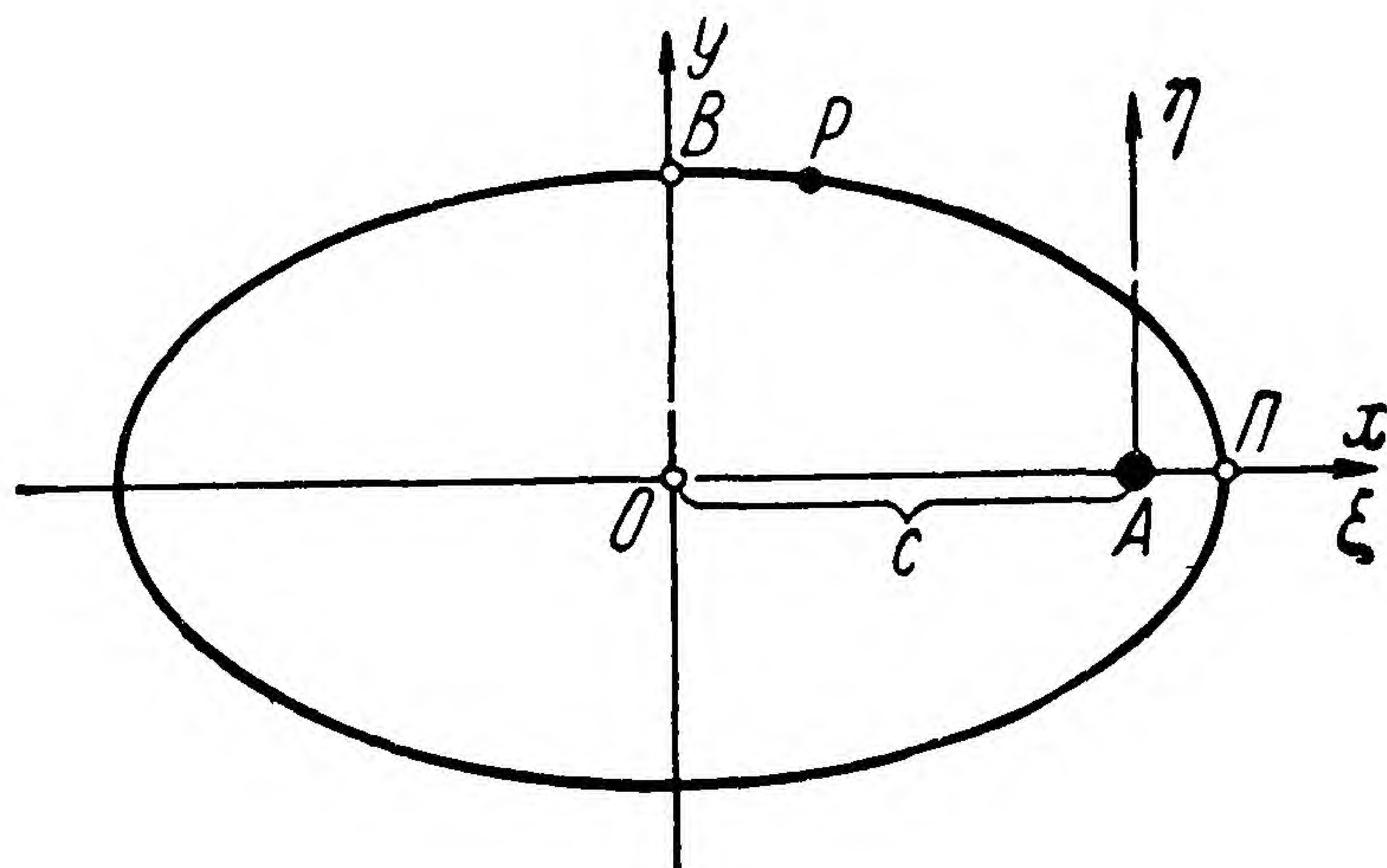


Рис. 3.2.

$$\xi = a(\cos E - \varepsilon), \ \eta = b \sin E = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin E. \tag{17}$$

Приведем еще формулы для компонент вектора скорости:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = n\frac{dr}{dM}, \ v_n = r\frac{d\theta}{dt} = rn\frac{d\theta}{dM}. \tag{18}$$

Пользуясь этими формулами, можно найти приближенные формулы для функций ξ, η, v_r, v_n при малых ε:

$$\xi \approx a\left[\cos M - \frac{1}{2}\varepsilon(3 - \cos 2M)\right], \tag{19}$$

$$\eta \approx a\left[\sin M + \frac{1}{2}\varepsilon \sin 2M\right], \tag{20}$$

$$v_r \approx na\varepsilon \sin M, \tag{21}$$

$$v_n \approx na\,(1 + \varepsilon \cos M). \tag{22}$$

Полученные формулы позволяют легко сравнить некоторые характеристики движения спутника P по орбите малого эксцентриситета с характеристиками некоторого фиктивного спутника, который двигался бы по окружности радиуса a вокруг центра O орбиты спутника P и притом имел бы такой же период обращения, как спутник P.

Задачи

1. Планета сферической структуры имеет радиус R и гравитационный параметр K. Известны высота искусственного спутника этой планеты при его прохождении через перицентр (H_π) и через апоцентр (H_α) и момент его прохождения через перицентр (t_0). Отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R < 0{,}1$. Получите приближенную формулу для вычисления высоты спутника в любой заданный момент времени t.

2. Относительно спутника той же планеты известны H_α, H_π и высота H в один момент времени t. В предположении, что отношение $(H_\alpha - H_\pi)/R$ мало, укажите способ для нахождения момента t_0 прохождения спутника через его перицентр.

3. Известны период T обращения искусственного спутника Земли, момент t_0 его прохождения через свой перигей и высота H в один момент времени t. Орбита мало отличается от окружности. Вычислите эксцентриситет орбиты.

4. Космический корабль «Восток», на котором Ю. А. Гагарин совершил первый в мире космический полет вокруг Земли, стартовал 12 апреля 1961 года в 9 часов 07 минут по московскому времени. Наибольшая высота корабля над поверхностью Земли составляла 327 *км*, наименьшая — 181 *км*. Будем считать, что корабль прошел через перигей в 9 часов 10 минут (эта цифра, возможно, весьма сильно отличается от истинного момента прохождения корабля через перигей). Тормозное устройство было включено в 10 часов 25 минут по московскому времени. Каковы были в этот момент истинная аномалия корабля и его высота над поверхностью Земли?

5. Докажите формулы (19) — (22).

§ 5. ФОРМУЛА ЛАМБЕРТА

Пусть спутник совершает перелет по известной эллиптической или гиперболической орбите. Будем считать известными главную полуось орбиты a, эксцентриситет орбиты ε, гравитационный параметр притягивающего центра K.

Если известны расстояния от концов дуги $\overset{\frown}{P_1P_2}$ орбиты спутника до притягивающего центра и длина хорды, соединяющей эти концы, то, оказывается, можно вычислить, сколько времени займет перелет спутника по этой дуге. Такую возможность для эллиптической или гиперболической орбиты дает формула, полученная 200 лет тому назад

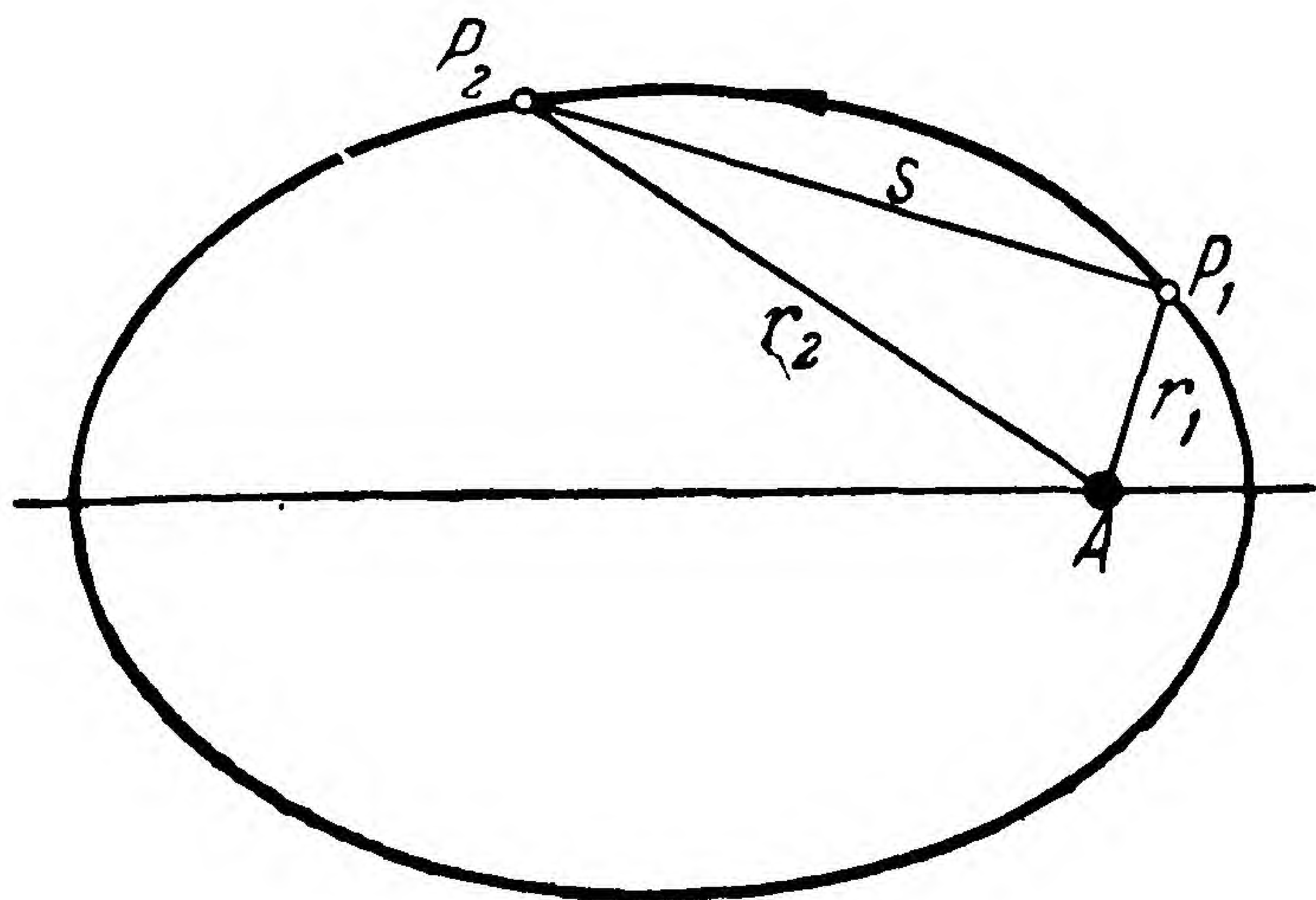


Рис. 3.3.

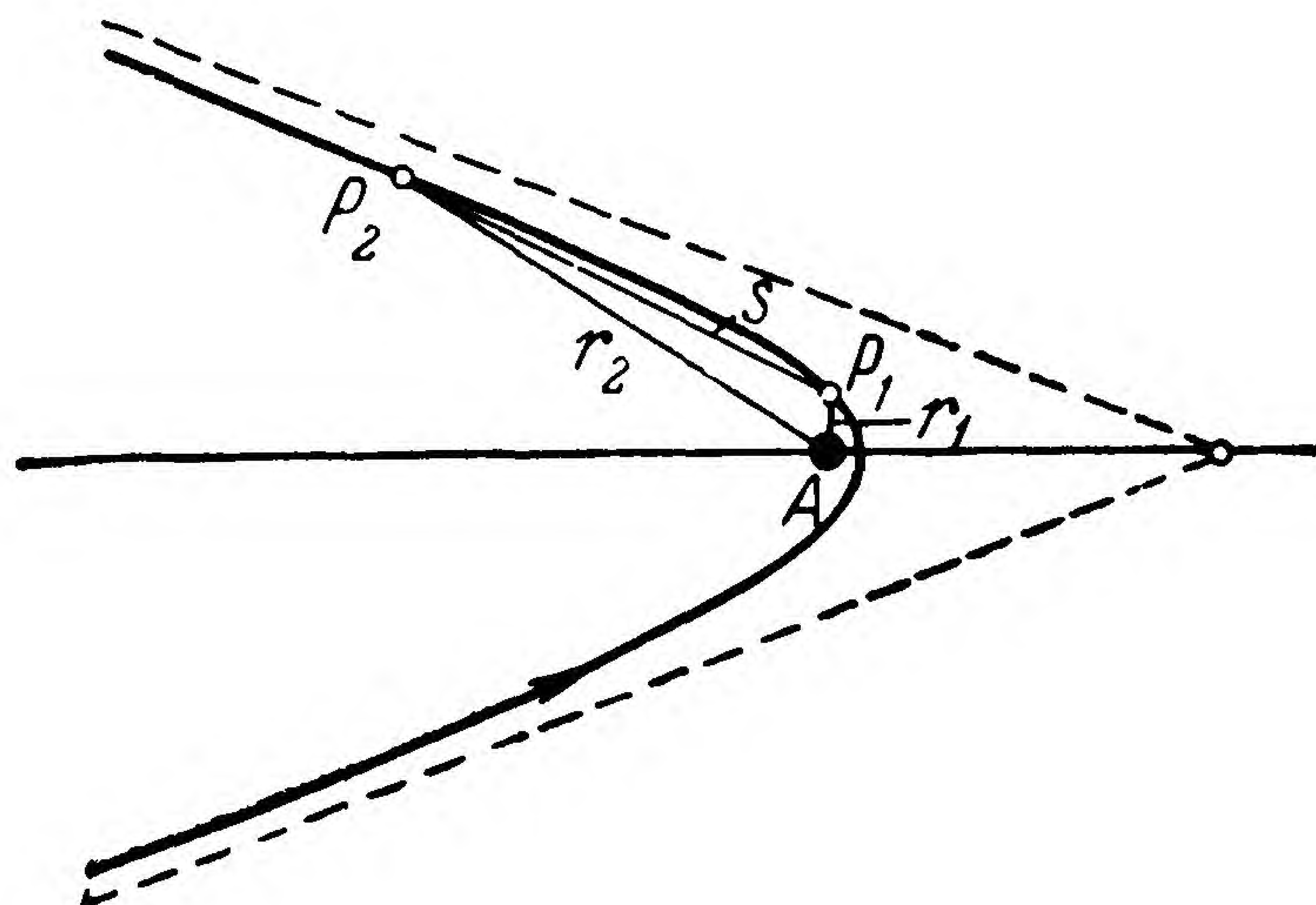


Рис. 3.4.

(в 1761 году) швейцарским математиком Иосифом Ламбертом. Различные доказательства этой формулы дали Ж. Лагранж (четыре доказательства), А. Кэли, Дж. Сильвестр и др.

Дадим здесь вывод этой формулы, принадлежащий Лагранжу. Рассуждения проведем одновременно для эллиптического и гиперболического движения.

Обозначим через t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$) моменты прохождения спутника через точки P_1 и P_2, через r_1 и r_2 — расстояния этих точек от притягивающего центра A, через s — длину хорды P_1P_2.

Чтобы избежать в дальнейшем громоздкого исследования, примем следующие дополнительные ограничения:

1) в случае эллиптической орбиты будем полагать, что спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после момента t_0 прохождения через перицентр, но до ближайшего после t_0 момента t_0' прохождения через апоцентр (рис. 3.3);

2) в случае гиперболической орбиты будем полагать, что спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр (рис. 3.4).

Обозначим через Z_1 и Z_2 эксцентрические аномалии точек P_1 и P_2.

Напомним, что в случае эллипса Z_1 и Z_2 — вещественные числа (вместо Z_1 и Z_2 обычно пишут тогда E_1 и E_2); в случае гиперболы Z_1 и Z_2 — чисто мнимые числа ($Z_1 = iH_1$, $Z_2 = iH_2$). В силу дополнительных ограничений 1) и 2) будем иметь соответственно в случае эллипса

$$0 \leqslant Z_1 < Z_2 \leqslant \pi \tag{1}$$

и в случае гиперболы

$$0 \leqslant \operatorname{Im} Z_1 < \operatorname{Im} Z_2. \tag{2}$$

Если t_0 — момент прохождения спутника через перицентр, то в силу уравнения Кеплера

$$n(t_1 - t_0) = Z_1 - \varepsilon \sin Z_1, \quad n(t_2 - t_0) = Z_2 - \varepsilon \sin Z_2,$$

откуда

$$n(t_2 - t_1) = Z_2 - Z_1 - \varepsilon(\sin Z_2 - \sin Z_1),$$

или

$$n(t_2 - t_1) = Z_2 - Z_1 - 2\varepsilon \sin \frac{Z_2 - Z_1}{2} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2}. \tag{3}$$

Покажем, что правую часть последней формулы можно выразить через длины трех отрезков: r_1, r_2, s.

Всегда можно подобрать число h так, чтобы имело место равенство

$$\varepsilon \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \cos h. \tag{4}$$

Мы, сверх того, потребуем в случае эллиптического движения, чтобы h было заключено между нулем и π:

$$0 \leqslant h \leqslant \pi. \tag{5}$$

А в случае гиперболического движения потребуем, чтобы h было чисто мнимым числом ($\operatorname{Re} h = 0$) и чтобы

$$\operatorname{Im} h \geqslant 0. \tag{6}$$

Таким выбором число h определяется однозначно. Кроме того, положим

$$g = \frac{Z_2 - Z_1}{2}. \tag{7}$$

Из принятого выше дополнительного ограничения 1) видно, что в случае эллиптической орбиты

$$0 < g \leqslant \pi/2. \tag{8}$$

А из ограничения 2) ясно, что в случае гиперболической орбиты

$$\operatorname{Re} g = 0, \ \operatorname{Im} g > 0. \tag{9}$$

Привлекая вспомогательные переменные g и h, перепишем формулу (3) так:

$$n(t_2 - t_1) = 2g - 2\sin g \cos h = \\ = 2g - [\sin(h+g) - \sin(h-g)]. \tag{10}$$

Введем новые вспомогательные величины λ_1 и λ_2 по формулам

$$\lambda_1 = h + g, \ \lambda_2 = h - g. \tag{11}$$

Теперь мы формулу (3) приведем к следующему виду:

$$n(t_2 - t_1) = (\lambda_1 - \sin\lambda_1) - (\lambda_2 - \sin\lambda_2). \tag{12}$$

Покажем, каким образом можно вычислить λ_1 и λ_2, если известны r_1, r_2, s, a, ε, K. Согласно (3.2.4)

$$r_1 = a(1 - \varepsilon\cos Z_1), \ r_2 = a(1 - \varepsilon\cos Z_2).$$

Поэтому

$$r_1 + r_2 = 2a\left[1 - \varepsilon\cos\frac{Z_1+Z_2}{2}\cos\frac{Z_1-Z_2}{2}\right] = \\ = 2a(1 - \cos g\cos h),$$

откуда

$$\cos g \cos h = 1 - \frac{r_1+r_2}{2a}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$s^2 = (P_1P_2)^2 = (a\cos Z_2 - a\cos Z_1)^2 + (b\sin Z_2 - b\sin Z_1)^2 = \\ = 4a^2\sin^2\frac{Z_2-Z_1}{2}\sin^2\frac{Z_1+Z_2}{2} + 4b^2\sin^2\frac{Z_2-Z_1}{2}\times \\ \times\cos^2\frac{Z_1+Z_2}{2} = 4a^2\sin^2 g\left[\sin^2\frac{Z_1+Z_2}{2} + \right. \\ \left. + (1-\varepsilon^2)\cos^2\frac{Z_1+Z_2}{2}\right] = 4a^2\sin^2 g\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{Z_1+Z_2}{2}\right) = \\ = 4a^2\sin^2 g(1-\cos^2 h) = 4a^2\sin^2 g\sin^2 h.$$

Отсюда

$$2a \sin g \sin h = \pm s. \tag{14}$$

Выясним знак в правой части последней формулы.

Покажем, что если выполняются дополнительные ограничения 1) или 2), то $a \sin g \sin h \geqslant 0$.

Пусть в случае эллиптической орбиты выполняется ограничение 1). Тогда $a > 0$ и из (5) и (8) видно, что

$$\sin h \geqslant 0, \sin g \geqslant 0, \sin g \sin h \geqslant 0.$$

Если же орбита — гипербола, то $a < 0$; кроме того, можно, в силу формул (6) и (9), переписать g и h в виде

$$g = ig', h = ih',$$

где g' и h' — неотрицательные числа, так что $\operatorname{sh} g' \geqslant 0$ и $\operatorname{sh} h' \geqslant 0$. Поэтому $a \sin g \sin h = a\, i \operatorname{sh} g'\, i \operatorname{sh} h' = - a \operatorname{sh} g' \operatorname{sh} h' \geqslant 0$. Таким образом, $a \sin g \sin h \geqslant 0$, и поэтому из формулы (14) следует, что $2a \sin g \sin h = + s$,

$$\sin g \sin h = \frac{s}{2a}. \tag{15}$$

Вычитая и складывая почленно (13) и (15) и учитывая (11), найдем:

$$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a}, \tag{16}$$

$$\cos \lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}. \tag{17}$$

Но существует бесконечно много чисел λ_1 и λ_2, удовлетворяющих последним условиям. Как же следует выбрать числа λ_1 и λ_2 в тех случаях, когда должны выполняться дополнительные ограничения 1) или 2)? Приведем (без доказательства) ответ на этот вопрос.

В случае *эллиптического* движения следует числа λ_1 и λ_2 брать из интервала $(0, \pi)$:

$$0 < \lambda_1 < \pi, 0 < \lambda_2 < \pi. \tag{18}$$

Тогда формулами (16) — (18) выбор чисел λ_1 и λ_2 определяется однозначно.

В случае *гиперболической* орбиты следует взять числа λ_1 и λ_2 так, чтобы

$$\operatorname{Im} \lambda_1 > 0 \text{ и } \operatorname{Im} \lambda_2 > 0. \tag{19}$$

Формулами (16), (17), (19) выбор чисел λ_1 и λ_2 тоже определяется однозначно.

Таким образом, мы видим, что *время $t_2 - t_1$, которое потребуется спутнику для перелета по дуге $\overset{\frown}{P_1P_2}$ эллиптической или гиперболической орбиты, определяется по формуле Ламберта*:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{n} [(\lambda_1 - \sin \lambda_1) - (\lambda_2 - \sin \lambda_2)],$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнений:

$$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a},$$

$$\cos \lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}.$$

В этих формулах r_1 и r_2 — расстояния от концов дуги до притягивающего центра, s — длина хорды P_1P_2, a — главная полуось орбиты ($a > 0$ в случае эллипса и $a < 0$ в случае гиперболы). Если орбита эллиптическая и спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр и до ближайшего прохождения через апоцентр, то следует брать λ_1 и λ_2 из сегмента $[0, \pi]$; если орбита гиперболическая и спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр, то следует дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{Im} \lambda_1 > 0 \text{ и } \operatorname{Im} \lambda_2 > 0.$$

Замечание 1. В случае гиперболического движения удобно перейти к вещественным гиперболическим функциям, полагая в (12) $\lambda_1 = i\lambda_1'$, $\lambda_2 = i\lambda'$ и приравнивая модули обеих частей равенства (12); формула Ламберта принимает тогда вид

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{|n|} [(\operatorname{sh} \lambda_1' - \lambda_1') - (\operatorname{sh} \lambda_2' - \lambda_2')], \tag{20}$$

где $|n|$ можно вычислить по формуле

$$|n| = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}}. \tag{21}$$

Числа λ_1' и λ_2' должны удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{ch} \lambda_1' = 1 + \frac{r_1 + r_2 + s}{2|a|}, \tag{22}$$

$$\operatorname{ch} \lambda_2' = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|}. \tag{23}$$

Если спутник проходит дугу $\overset{\frown}{P_1P_2}$ после прохождения через перицентр, то следует брать $\lambda_1' > 0$, $\lambda_2' > 0$.

Замечание 2. Формула Ламберта (12) остается в силе при любом расположении точек P_1 и P_2 на орбите спутника, но для правильного выбора чисел λ_1 и λ_2 среди корней уравнений (16) и (17) требуется провести в каждом случае специальное исследование.

Для случая эллиптической орбиты такое исследование было впервые выполнено около 100 лет тому назад известным английским математиком А. Кэли. Результаты этого исследования приведены в таблице 1. В таблице 1 использованы следующие обозначения: $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ — наименьшие положительные углы, удовлетворяющие условиям (16) и (17); A — фокус, в котором находится притягивающий центр; F — «пустой» фокус («антифокус»); S — сегмент, ограниченный хордой P_1P_2 и дугой $\overset{\frown}{P_1P_2}$, описанной спутником между моментами t_1 и t_2.

Замечание 3. Формула, аналогичная формуле Ламберта, была найдена для случая *параболической* орбиты Ньютоном (1687 г.) и, независимо от него, Эйлером (1743 г.).

Согласно формуле Ньютона — Эйлера время перелета $t_2 - t_1$ по дуге $\overset{\frown}{P_1P_2}$ параболической орбиты выражается следующим образом через параметр орбиты p, расстояние s между концами хорды и расстояния r_1 и r_2 концов дуги от притягивающего центра:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{6\sqrt{K}} \left[(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \pm (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \right]. \tag{24}$$

Таблица 1

Возможные случаи: сегмент S	Чертеж	Какие числа следует подставить в формулу Ламберта вместо	
		λ_1	λ_2
не содержит ни A, ни F		$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
содержит и A, и F		$2\pi - \bar{\lambda}_1$	$-\bar{\lambda}_2$
содержит только A, но не F		$\bar{\lambda}_1$	$-\bar{\lambda}_2$
содержит только F, но не A		$2\pi - \bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$

Знак плюс берется, если так называемая «угловая дальность» между точками P_1 и P_2 (то есть разность $\theta_2 - \theta_1$ между их истинными аномалиями) больше 180°, минус — если эта величина меньше 180°. Формула Ньютона — Эйлера может быть получена из формулы Ламберта путем предельного перехода, когда $a \to \infty$.

Задачи

1. Космическая ракета совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса (C — начало перелета, D — конец; см. рис. 3.5), притом на таких расстояниях от Земли и Марса, что можно пренебречь притяжением этих планет и учитывать только тяготение ракеты к Солнцу. Расстояния перигелия и афелия орбиты от (центра) Солнца равны соответственно $120\cdot 10^6$ *км* и $240\cdot 10^6$ *км*. Известно, что $SC = 150\cdot 10^6$ *км*, $SD = 228\cdot 10^6$ *км*. Сколько времени должен занять этот перелет?

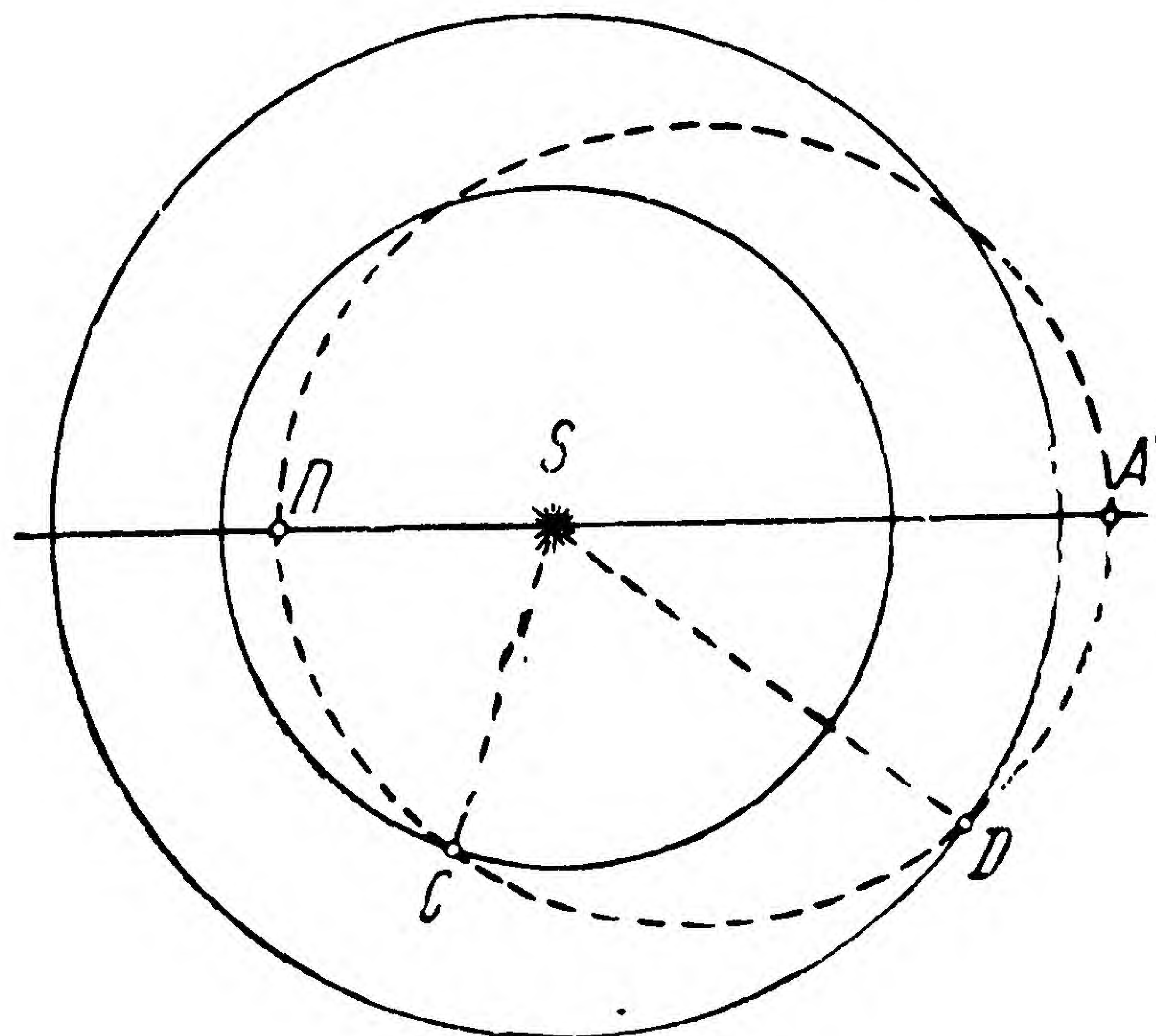


Рис. 3.5.

2. Космический снаряд получил в точке C вблизи орбиты Земли на расстоянии $150\cdot 10^6$ *км* от центра Солнца скорость (относительно Солнца) 50 *км/сек*. Через некоторое время он достигнет орбиты Юпитера (окажется в точке D на расстоянии $800\cdot 10^6$ *км* от Солнца), причем $\angle CSD = 90°$. Сколько времени должен занять этот перелет? Полет совершается в таких условиях, что можно учитывать лишь тяготение снаряда к Солнцу.

3. Космолет совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса. В точке C на земной орбите скорость космолета относительно Солнца составляла 42,1 *км/сек*. Точка D, через которую должен пройти космолет и которая находится на орбите Марса, выбирается таким образом, чтобы $\angle CSD = 60°$. Условия перелета таковы, что можно пренебречь тяготением Земли и Марса. Сколько времени должен занять такой перелет?

4. Выведите формулу Ньютона — Эйлера (24), используя формулы параболического движения.

ГЛАВА IV

ТРАЕКТОРИЯ СПУТНИКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

1. В предыдущей главе нас интересовало, как будет меняться с течением времени положение спутника в *плоскости его орбиты*. Для этой цели в плоскости орбиты выбиралась определенная система координат (например, полярная система координат с полюсом в притягивающем центре A и с полярной осью $A\Pi$, направленной в перицентр орбиты Π, или прямоугольная система координат с началом в притягивающем центре и с осью абсцисс $A\Pi$). В такой системе отсчета мы научились находить положение (координаты) спутника в любой момент времени. Однако на практике часто возникает необходимость рассматривать движение спутника в других системах отсчета, для которых плоскость орбиты не является координатной плоскостью. Например, при исследовании движения искусственных спутников Земли обычно за одну из координатных плоскостей принимают плоскость земного экватора; при изучении движения межпланетных космических кораблей выбирают в качестве одной из координатных плоскостей плоскость эклиптики (плоскость, в которой Земля движется вокруг Солнца).

Пусть выбрана некоторая прямоугольная правоориентированная система отсчета $Axyz$ с началом в притягивающем центре A и осями, имеющими неизменную ориентацию в пространстве (рис. 4.1). Орты (единичные векторы) осей Ax, Ay, Az обозначим соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Для простоты будем полагать, что орбита спутника не прямолинейная и не круговая.

Нас сейчас интересует: каким образом можно предсказать положение спутника (то есть его координаты

в избранной системе отсчета) в любой наперед заданный момент времени t?

Движение спутника описывается тремя дифференциальными уравнениями второго порядка (2.1.9)*). Порядок этой системы равен шести. Известно, что из такой системы искомые величины (x, y, z) выражаются в виде функций от независимого переменного t и шести произвольных постоянных. Следовательно, движение спутника полностью определяется заданием шести констант. Выбор этих шести констант может быть выполнен различными способами.

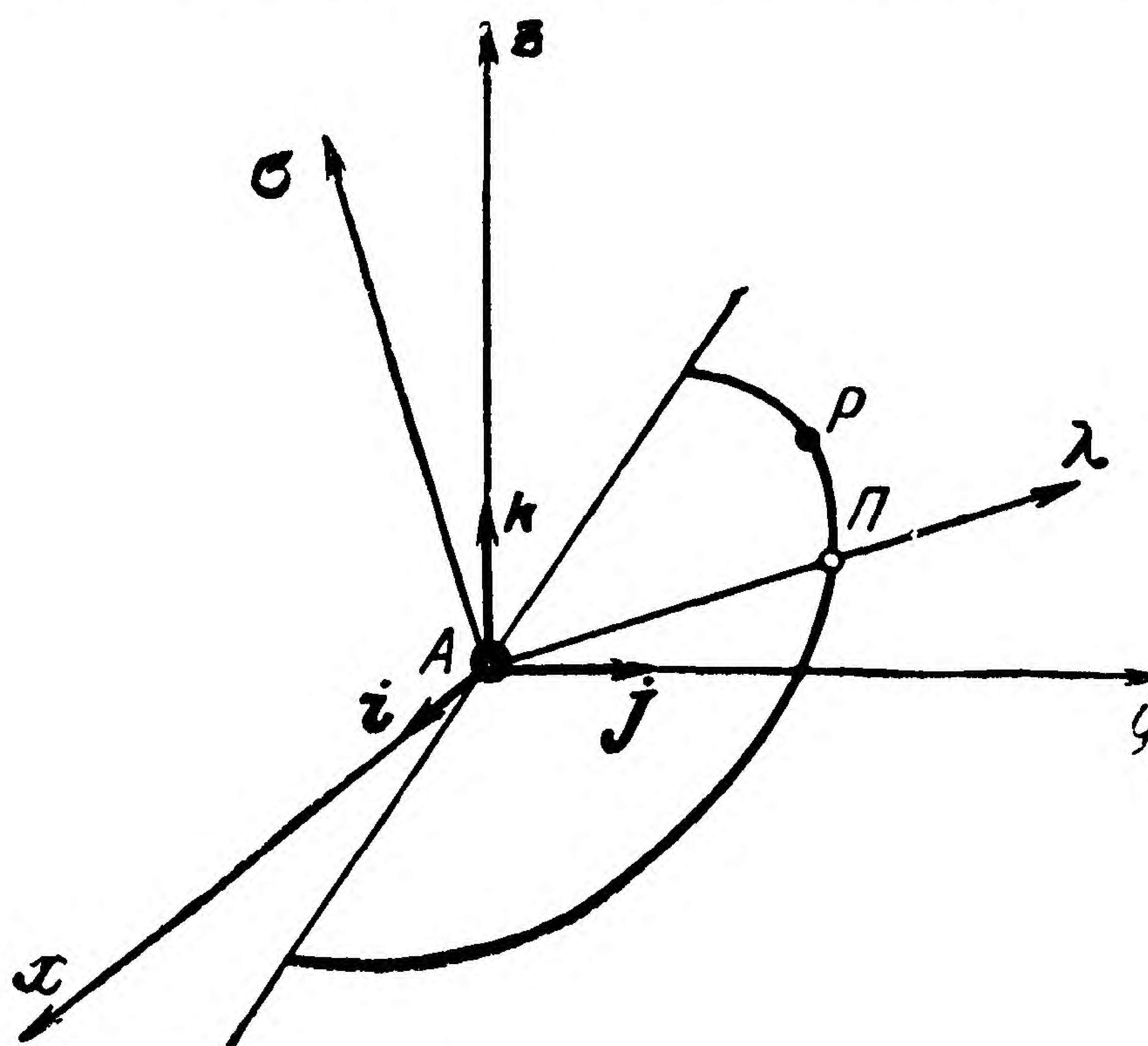


Рис. 4.1.

Движение спутника полностью определяется положением плоскости его орбиты в пространстве (то есть положением этой плоскости относительно выбранной системы координат); формой и размерами орбиты; положением орбиты в плоскости движения; моментом прохождения спутника через его перицентр (или через какую-либо другую, вполне определенную точку орбиты).

Чтобы иметь всю информацию о положении и форме орбиты, достаточно знать лишь две векторные константы: векторную константу площадей $\boldsymbol{\sigma}$ и вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$.

Действительно, в § 3 главы II было показано, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ортогонален плоскости орбиты; поэтому вектор $\boldsymbol{\sigma}$ определяет положение этой плоскости. Если вектор $\boldsymbol{\sigma}$ имеет

---

*) Гравитационный параметр K считаем известным.

компоненты σ_1, σ_2, σ_3, то уравнение этой плоскости записывается в виде

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0. \qquad (1)$$

Фокальный параметр p и эксцентриситет орбиты ε можно вычислить по формулам из § 5 главы II:

$$p = \sigma^2/K,\ \varepsilon = \lambda/K, \qquad (2)$$

где σ и λ — длины векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ направлен вдоль линии апсид орбиты; таким образом, этот вектор определяет положение самой орбиты в ее плоскости. Векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ можно задать их компонентами σ_k, λ_k ($k = 1, 2, 3$). Однако, как мы установили в § 4 главы II, векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ взаимно перпендикулярны, то есть между шестью числами σ_k, λ_k имеет место зависимость

$$\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3 = 0. \qquad (3)$$

Поэтому среди этих чисел σ_k, λ_k ($k = 1, 2, 3$) только пять могут быть, вообще говоря, заданы произвольно.

Если заданы эти пять величин и момент t_0 прохождения спутника через перицентр, то положение спутника в плоскости его орбиты в любой момент времени t можно найти по формулам главы III. Таким образом, движение спутника относительно притягивающего центра с данным гравитационным параметром K полностью определяется шестью величинами:

1) пятью числами из шести: σ_1, σ_2, σ_3, λ_1, λ_2, λ_3;

2) числом t_0.

Такие шесть величин, которые позволяют однозначно определить положение спутника в любой момент времени, называют *элементами орбиты спутника*. Мы сейчас рассмотрели один способ выбора шести элементов орбиты. Однако существует и много других способов.

2. В астрономии элементы орбиты обычно выбираются следующим образом (рис. 4.2).

Если плоскость орбиты спутника не совпадает с плоскостью Axy, то эти плоскости пересекаются по некоторой прямой l, которую называют *линией узлов* орбиты относительно выбранной системы отсчета. На этой прямой лежат точки пересечения орбиты с плоскостью Axy, называемые *узлами* орбиты. При прохождении через один из узлов

спутник переходит из области отрицательных аппликат ($z<0$) в область положительных аппликат ($z>0$), а при прохождении через второй узел — наоборот. Первый из узлов называется *восходящим узлом*, мы его будем обозначать ☊; второй узел называется *нисходящим* и обозначается через ☋.

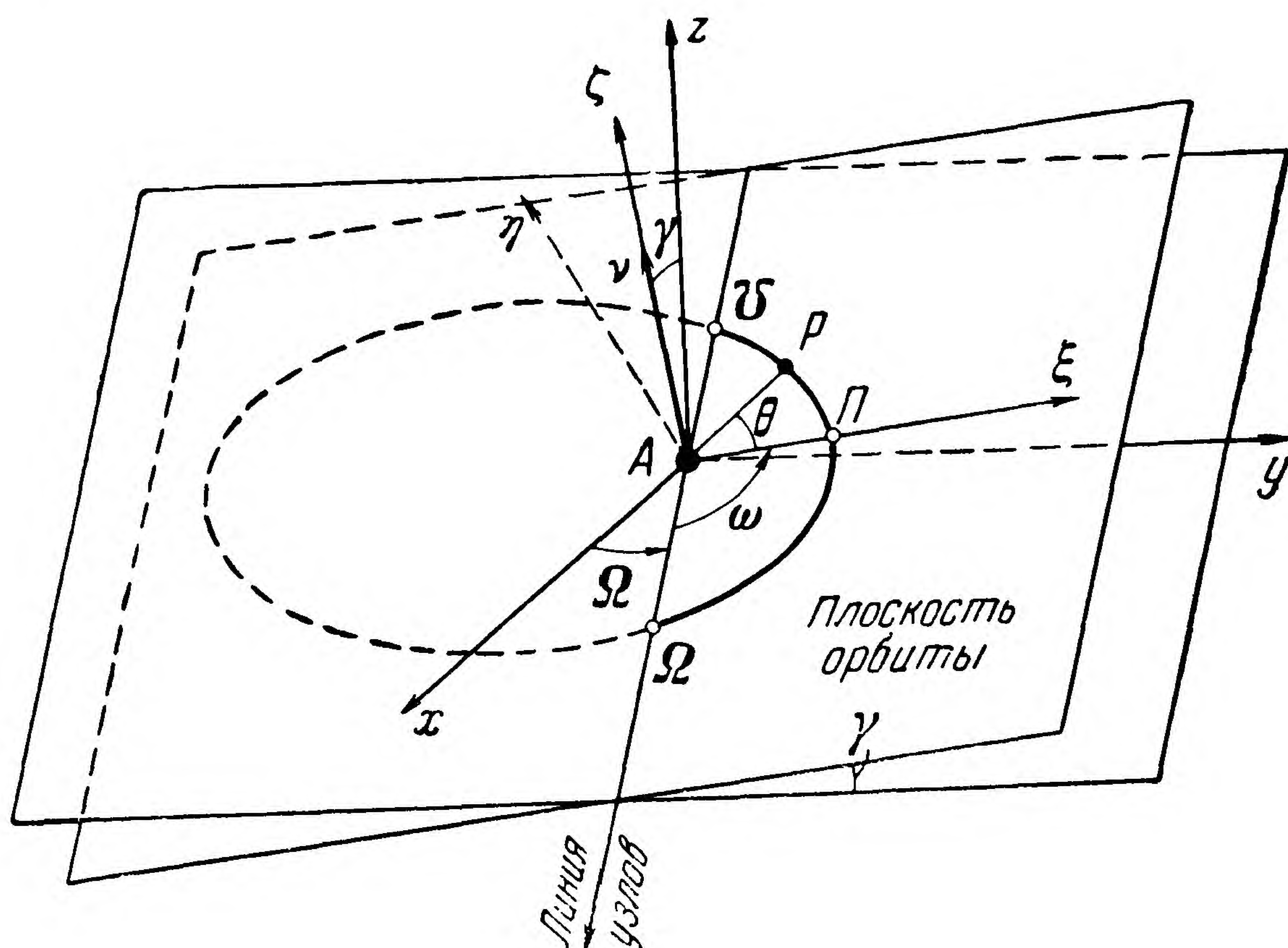


Рис. 4.2.

В случае гиперболического или параболического движения может оказаться, что орбита пересекает прямую l лишь в одной точке, например существует лишь восходящий узел ☊, а нисходящего нет. В таком случае можно считать, что нисходящий узел ☋ находится в бесконечности на луче ☊A. В дальнейшем линию узлов мы будем рассматривать как *направленную* прямую (ось); положительным направлением на линии узлов будем считать направление от притягивающего центра A к восходящему узлу.

Угол между положительным направлением оси Ax и положительным направлением линии узлов называется *долготой восходящего узла*; обозначим его буквой ☊ — так же, как и сам восходящий узел. Величину ☊ будем отсчитывать всегда в пределах между 0 и 2π:

$$0 \leqslant ☊ < 2\pi.$$

Построим единичный вектор ν, обладающий следующими свойствами: 1) его началом служит точка A; 2) он перпендикулярен к плоскости орбиты; 3) из его конца движение спутника представляется происходящим против часовой стрелки. Такой вектор ν будем называть *ортом внешней нормали* к плоскости орбиты (рис. 4.2). Вектор ν вполне характеризует положение плоскости орбиты в пространстве. Угол γ между осью аппликат Az и вектором ν называется *наклонением орбиты*. Величину γ будем отсчитывать всегда от 0 до π ($0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$).

Легко убедиться в том, что наклонение γ равно углу между плоскостью Axy и плоскостью орбиты.

Два числа Ω и γ вполне определяют положение плоскости орбиты *).

Эксцентриситет ε орбиты вполне характеризует ее *форму*, то есть определяет ее с точностью до подобного преобразования. Для того чтобы еще задать *размеры* орбиты, достаточно указать параметр орбиты p или другой какой-либо линейный элемент, например перицентральное расстояние r_π или — в случае эллипса и гиперболы — главную полуось a. Итак, для определения размеров и формы орбиты достаточно задать пару чисел ε и p (или ε и $|a|$, если орбита — не парабола) или, наконец, любую пару из чисел $a, b, c, p, r_\pi, \varepsilon, h$.

Для задания *положения* орбиты в ее *плоскости* теперь достаточно указать положение луча $A\Pi$, направленного к перицентру.

Угол ω между линией узлов $A\Omega$ и линией апсид $A\Pi$ называется *аргументом перицентра* или угловым расстоянием перицентра от узла. Точнее, аргументом перицентра называется угол ω, на который следует повернуть против часовой стрелки (с точки зрения наблюдателя, расположенного в конце вектора ν) луч $A\Omega$ для того, чтобы он совместился с лучом $A\Pi$. Если угол ω задан, то однозначно определяется положение луча $A\Pi$. Угол ω условимся всегда отсчитывать в пределах от 0 до 2π ($0 \leqslant \omega < 2\pi$).

Будем еще считать известным тот момент времени t_0, когда спутник прошел через перицентр Π.

---

*) Исключение составляет тот случай, когда $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$. В этом случае величина Ω теряет смысл.

Набор шести чисел Ω, γ, ε, p, ω, t_0 позволяет, как мы увидим ниже, определить положение спутника в любой момент времени t. В астрономии под элементами орбиты спутника обычно понимают именно эту шестерку чисел.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО ИЗВЕСТНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ЕГО ОРБИТЫ

1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть имеются две (правые) системы прямоугольных декартовых координат с общим началом A (рис. 4.3). Одну из этих систем назовем «старой», другую — «новой». Пусть известны координаты ($x_с$, $y_с$, $z_с$) точки P (спутника) в «старой» системе отсчета. Найдем координаты ($x_н$, $y_н$, $z_н$) той же точки в «новой» системе.

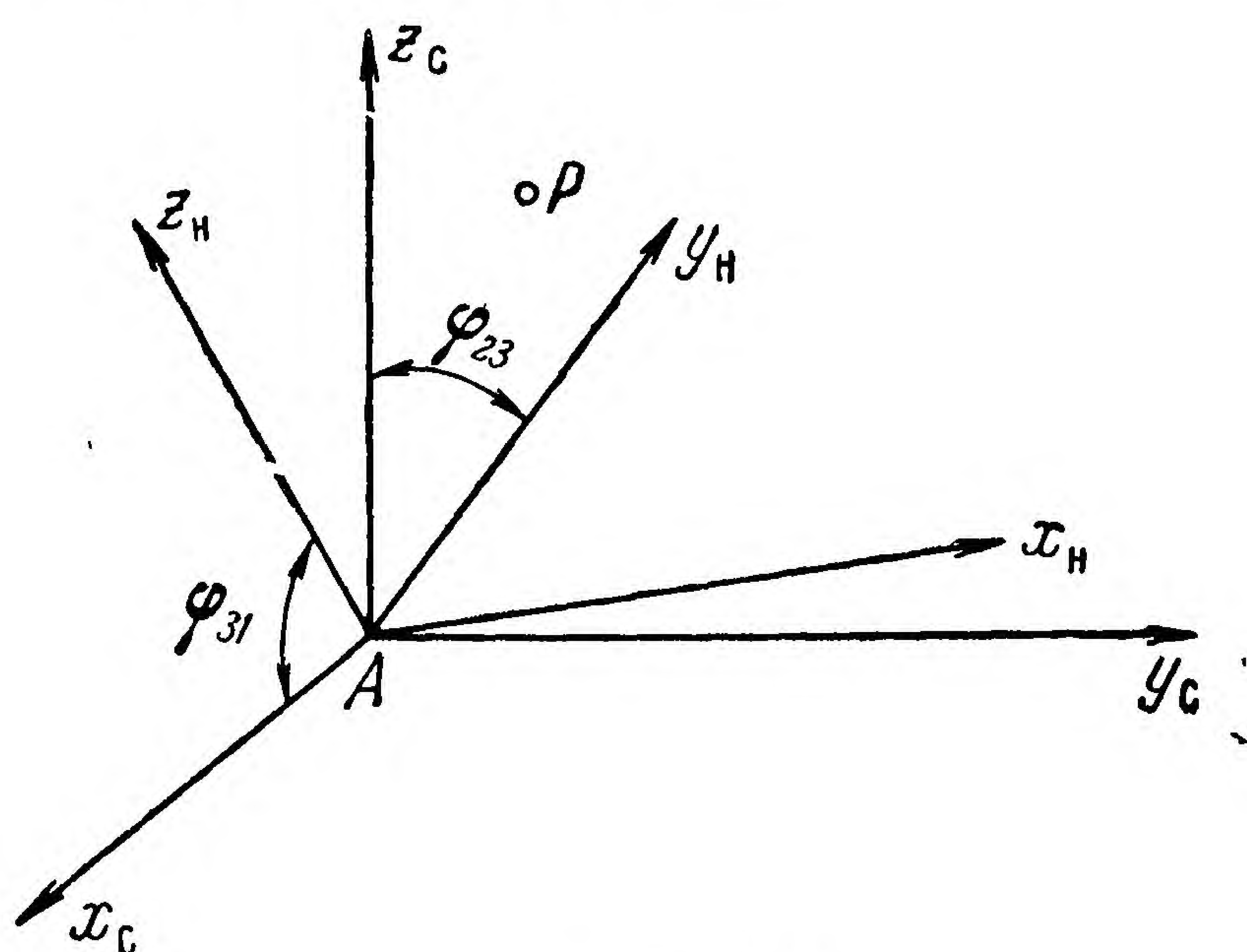


Рис. 4.3.

Обозначим орты (единичные векторы) «старых» осей координат через $\boldsymbol{i}_с$, $\boldsymbol{j}_с$, $\boldsymbol{k}_с$, а орты «новых» осей координат — через $\boldsymbol{i}_н$, $\boldsymbol{j}_н$, $\boldsymbol{k}_н$. Тогда будем иметь для вектора $\overline{AP}$:

$$\overline{AP} = x_н\boldsymbol{i}_н + y_н\boldsymbol{j}_н + z_н\boldsymbol{k}_н = x_с\boldsymbol{i}_с + y_с\boldsymbol{j}_с + z_с\boldsymbol{k}_с. \qquad (1)$$

Умножив последнее равенство скалярно на $\boldsymbol{i}_н$, найдем:

$$x_н = (\boldsymbol{i}_н \cdot \boldsymbol{i}_с)\, x_с + (\boldsymbol{i}_н \cdot \boldsymbol{j}_с)\, y_с + (\boldsymbol{i}_н \cdot \boldsymbol{k}_с)\, z_с. \qquad (2)$$

Аналогичные формулы можно написать для $y_н$ и $z_н$.

Будем называть оси $Ax_с$, $Ay_с$, $Az_с$ соответственно первой, второй и третьей «старой» осью. Аналогичные названия используем для «новых» осей. Обозначим через φ_{pq} угол, образованный «новой» осью номер p со «старой» осью номер q (p, $q = 1, 2, 3$), а через α_{pq} — косинус этого угла:

$$\alpha_{pq} = \cos \varphi_{pq}. \qquad (3)$$

Так, например, α_{23} — это косинус угла, образованного «новой» осью $Ay_н$ («новой» осью номер 2) с осью $Az_с$ («старой»

осью номер 3). Формула (2) переписывается теперь так:

$$x_н = \alpha_{11}x_с + \alpha_{12}y_с + \alpha_{13}z_с. \tag{4}$$

Аналогично

$$y_н = \alpha_{21}x_с + \alpha_{22}y_с + \alpha_{23}z_с, \tag{5}$$

$$z_н = \alpha_{31}x_с + \alpha_{32}y_с + \alpha_{33}z_с. \tag{6}$$

Формулы (4), (5), (6) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_н \\ y_н \\ z_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_с \\ y_с \\ z_с \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Равенство (7) и дает решение поставленной выше задачи.

Представим себе теперь, что затем совершается переход от «новой» системы координат к «новейшей»; тогда «новейшие» координаты $x'_н$, $y'_н$, $z'_н$ точки P выражаются через ее «новые» координаты $x_н$, $y_н$, $z_н$ с помощью формулы

$$\begin{bmatrix} x'_н \\ y'_н \\ z'_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_н \\ y_н \\ z_н \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где β_{pq} — косинус угла между «новейшей» осью номер p и «новой» осью номер q (p, q = 1, 2, 3).

Вводя следующие обозначения для векторов и матриц:

$$\boldsymbol{r}_с = \begin{bmatrix} x_с \\ y_с \\ z_с \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_н = \begin{bmatrix} x_н \\ y_н \\ z_н \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}'_н = \begin{bmatrix} x'_н \\ y'_н \\ z'_н \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix},$$

запишем формулы (7) и (8) в виде

$$\boldsymbol{r}_н = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_с, \quad \boldsymbol{r}'_н = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}_н,$$

так что

$$\boldsymbol{r}'_н = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_с). \tag{9}$$

Но так как для умножения матриц верен сочетательный закон, то

$$\mathbf{r}'_{\text{н}} = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{r}_{\text{с}}. \tag{10}$$

2. Применим теперь полученные формулы к решению следующей задачи: *зная элементы орбиты спутника, найти его положение в момент t относительно данной системы декартовых прямоугольных координат $Axyz$, имеющей начало отсчета в притягивающем центре A* (рис. 4.4).

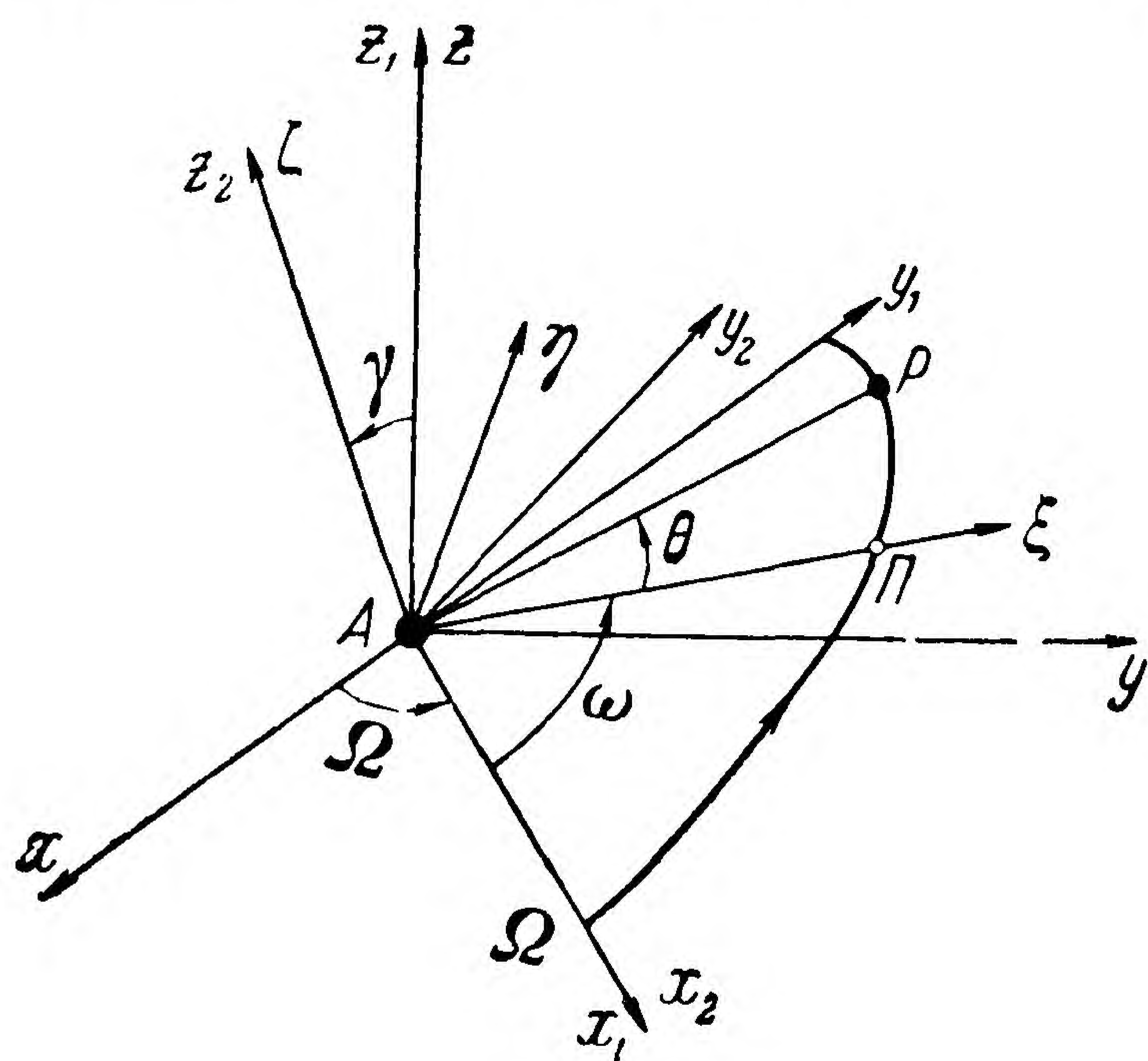


Рис. 4.4.

Рассмотрим *вспомогательную* систему отсчета $A\xi\eta\zeta$ с началом в притягивающем центре (мы ее назовем *орбитальной* системой отсчета): за ось абсцисс $A\xi$ примем линию апсид орбиты спутника (положительное направление — от притягивающего центра A к перицентру Π); ось ординат $A\eta$ получим поворотом оси $A\xi$ в плоскости орбиты на 90° в направлении движения спутника; ось аппликат $A\zeta$ выбирается так, чтобы система координат $A\xi\eta\zeta$ была правоориентированной.

Переход от системы отсчета $Axyz$ к орбитальной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$ можно совершить, если подвергнуть систему отсчета $Axyz$ последовательно трем следующим преобразованиям:

1) повороту вокруг оси Az на угол Ω (в результате получим новую систему отсчета $Ax_1y_1z_1$, причем $Az_1 \equiv Az$);

2) повороту вокруг оси Ax_1 на угол γ (получим новую систему отсчета $Ax_2y_2z_2$, причем $Ax_2 \equiv Ax_1$); ось Az_2 перпендикулярна к плоскости орбиты;

3) повороту вокруг оси Az_2 на угол ω (получим систему $A\xi\eta\zeta$; $A\zeta \equiv Az_2$).

Обозначим матрицы этих трех поворотов соответственно через $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и положим

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1. \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Легко понять, каким образом можно осуществить обратный переход от системы отсчета $A\xi\eta\zeta$ к системе отсчета $Axyz$. Для этой цели достаточно совершить последовательно три поворота (те же, что раньше, но в обратном порядке и в обратном направлении).

Обозначая матрицы этих последовательных поворотов соответственно через $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$, получим:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3 \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \text{ или, короче, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3. \qquad (14)$$

Найдем теперь явные выражения для матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ ($k=1, 2, 3$). Начнем с матрицы $\boldsymbol{A}_1$. Составим таблицу углов φ_{pq} между осями системы $Ax_1y_1z_1$ и системы $Axyz$:

	Ax	Ay	Az
Ax_1	Ω	$\frac{\pi}{2}-\Omega$	$\frac{\pi}{2}$
Ay_1	$\frac{\pi}{2}+\Omega$	Ω	$\frac{\pi}{2}$
Az_1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

Поэтому

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Аналогично можно составить таблицы углов между осями и матрицы двух других поворотов:

	Ax_1	Ay_1	Az_1
Ax_2	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Ay_2	$\frac{\pi}{2}$	γ	$\frac{\pi}{2}-\gamma$
Az_2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+\gamma$	γ

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \tag{16}$$

	Ax_2	Ay_2	Az_2
$A\xi$	ω	$\frac{\pi}{2}-\omega$	$\frac{\pi}{2}$
$A\eta$	$\frac{\pi}{2}+\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
$A\zeta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Заменяя в матрицах A_1, A_2, A_3 углы Ω, γ, ω на $-\Omega$, $-\gamma$, $-\omega$, получим матрицы B_k, $k = 1, 2, 3$:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Матрицу $\boldsymbol{B}$ иногда называют *матрицей проективных коэффициентов* и записывают в виде

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Таким образом [см. (19) и (14)],

$$\boldsymbol{B} \equiv \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Перемножив эти матрицы, получим:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos \gamma) & (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos \gamma) & \sin \Omega \sin \gamma \\ (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos \gamma) & (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos \gamma) & -\cos \Omega \sin \gamma \\ \sin \gamma \sin \omega & \sin \gamma \cos \omega & \cos \gamma \end{bmatrix}. \tag{20'}$$

Из (13) и (20) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Вычисляя матрицу $\boldsymbol{A}$ по формулам (11), (15) — (17), нетрудно убедиться в том, что она может быть получена из матрицы $\boldsymbol{B}$ транспонированием:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Пусть нам известны шесть элементов *эллиптической* орбиты спутника $\Omega, \gamma, \omega, a, \varepsilon, t_0$. Тогда можно предсказать его положение в любой момент времени t.

Действительно, решая уравнение Кеплера

$$E - \varepsilon \sin E = n (t - t_0),\ n = \sqrt{K/a^3},$$

мы можем для момента t найти E. Кроме того, по a и ε просто вычисляется b, а именно: $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Положение спутника в орбитальной системе отсчета определяется вектором

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a (\cos E - \varepsilon) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Чтобы получить тот же вектор в системе отсчета $Axyz$, эту матрицу в соответствии с формулой (21) следует умножить слева на матрицу проективных коэффициентов $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} a (\cos E - \varepsilon) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

Иначе эту формулу записывают так:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a (\cos E - \varepsilon) + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} b \sin E. \qquad (25)$$

Совершенно аналогичная формула верна и в случае *гиперболического* движения. Чтобы ее получить, достаточно в формуле (25) заменить E на iH, a — на $-|a|$, b — на $-i|b|$.

3. Положение спутника и элементы орбиты, как мы видели, удобно определять относительно прямоугольной системы координат с началом в притягивающем центре A и с осями Ax, Ay, Az, постоянно ориентированными в пространстве.

В разных задачах основную плоскость Axy этой системы выбирают по-разному. Например, при изучении движения спутников Земли за основную плоскость $Ax_э y_э$ принимают плоскость экватора, ось $Az_э$ направляют от центра

Земли к ее Северному полюсу, а ось $Ax_э$ — в так называемую точку весеннего равноденствия; ось $Ay_э$ выберем так, чтобы система $Ax_эy_эz_э$ была правоориентированной. Такая система $Ax_эy_эz_э$ называется экваториальной геоцентрической системой отсчета. Аналогично можно определить для Луны (для любой планеты или для любой звезды) экваториальную селеноцентрическую (соответственно планетоцентрическую или астроцентрическую) систему отсчета. Положение спутника P в экваториальной геоцентрической системе координат можно задать не только тремя его декартовыми координатами ($x_э$, $y_э$, $z_э$), но и тремя сферическими координатами: геоцентрическим радиусом-вектором r, склонением δ и прямым восхождением α *) (рис. 4.5). Склонение δ определяется как угол между радиусом-вектором AP и его проекцией AP_1 на плоскость экватора ($-90° \leqslant \delta \leqslant 90°$), а прямое восхождение — как угол между осью $Ax_э$ и лучом AP_1 ($0° \leqslant \alpha < 360°$).

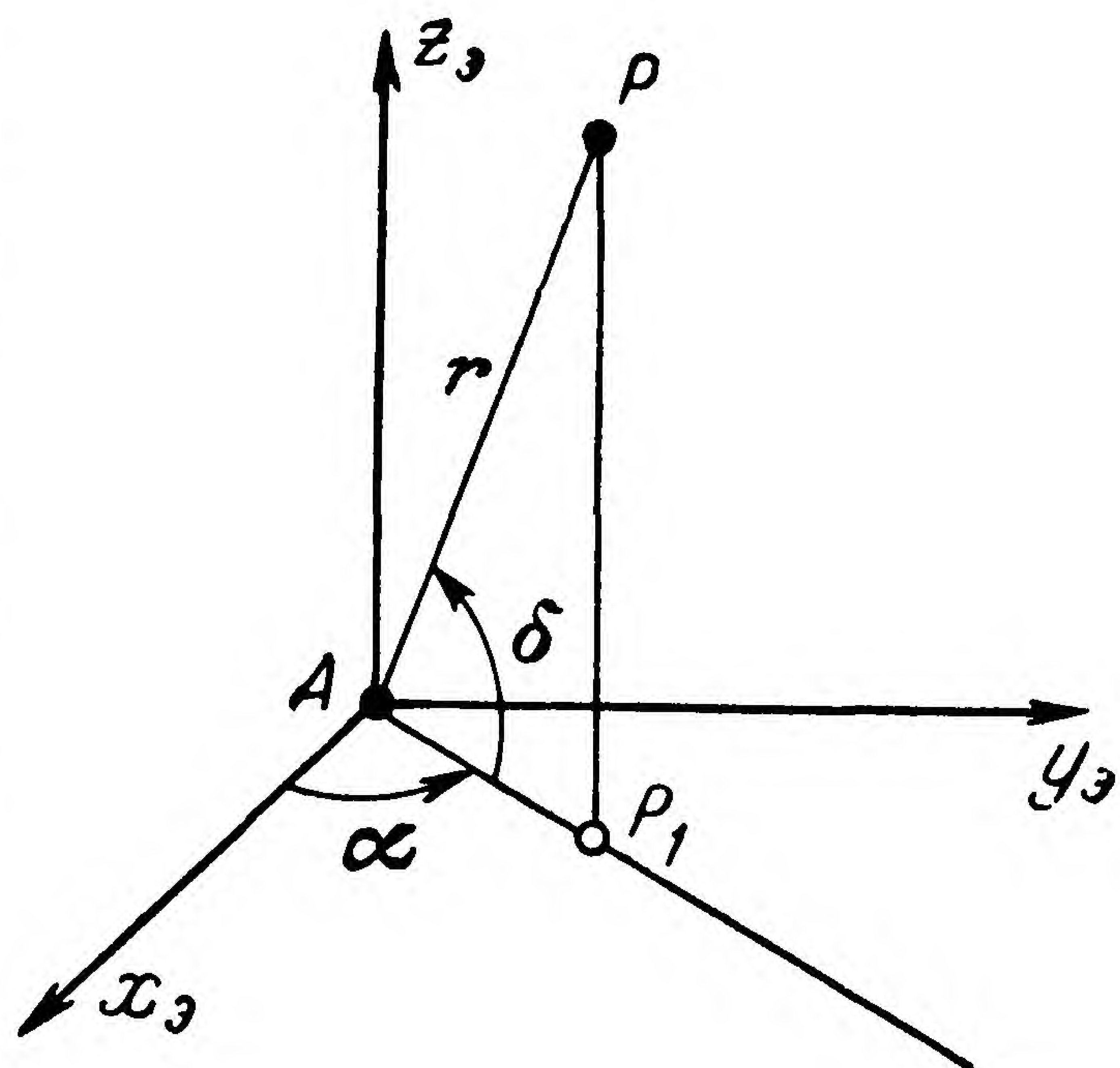


Рис. 4.5.

При решении ряда задач космонавтики удобно определять положение спутника по отношению к системе координат с началом не в центре Земли A, а в точке наблюдения B.

Например, это может быть система отсчета с началом в каком-либо данном пункте B на поверхности Земли и с осями, параллельными осям системы $Axyz$. Если A — центр Земли, а оси $B\xi$, $B\eta$, $B\zeta$ системы $B\xi\eta\zeta$ имеют такие же направления, как соответствующие оси геоцентрической экваториальной системы координат, то систему $B\xi\eta\zeta$ можно назвать *топоцентрической экваториальной* системой координат. Другой пример выбора системы $B\xi\eta\zeta$: точка B — на поверхности Земли; основная плоскость $B\xi\eta$ — касательная

*) В астрономии обычно понимают под прямым восхождением угол $360° - \alpha$.

плоскость к поверхности Земли в точке B (плоскость горизонта); ось $B\eta$ направлена по меридиану к Северному полюсу Земли, ось $B\zeta$ имеет направление внешней нормали к поверхности Земли (направлена в зенит), ось $B\xi$ направлена по параллели, проходящей через B, и притом так, что система $B\xi\eta\zeta$ правоориентированная. Такую систему отсчета называют *горизонтальной*.

Положение спутника в горизонтальной системе координат можно задать не только тремя его декартовыми координатами ($x_г$, $y_г$, $z_г$), но и тремя сферическими координатами (рис. 4.6): дальностью ρ, угловой высотой спутника над горизонтом (угол h) и азимутом (угол A). Координаты ρ, h и A можно найти, например, из радиотехнических наблюдений за спутником P, а h и A — также из оптических наблюдений *).

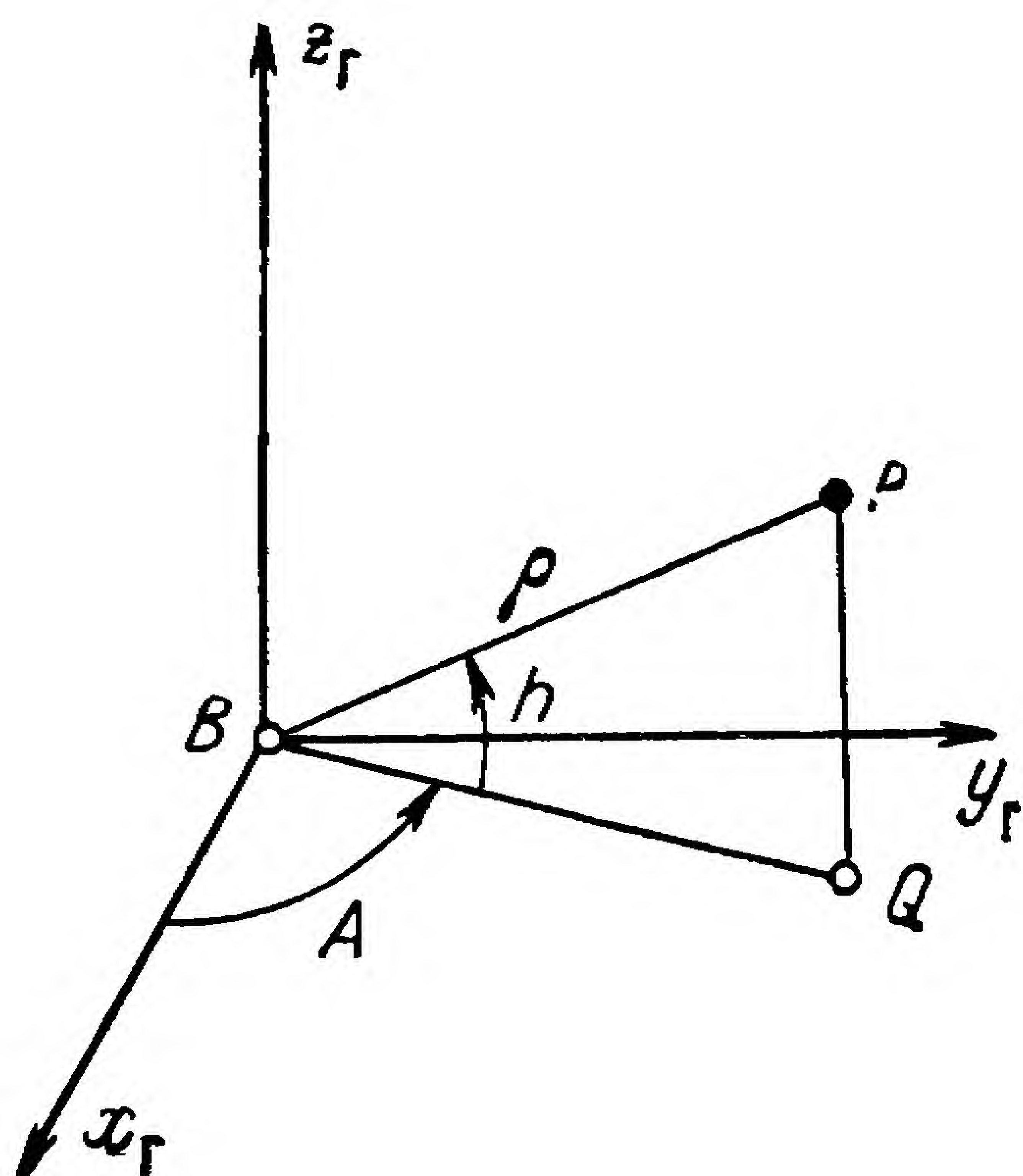


Рис. 4.6.

В общем случае точка B не обязательно лежит на поверхности Земли. Можно, например, выбрать систему отсчета $B\xi\eta\zeta$ так, чтобы точка B совпала с A, ось $B\zeta$ была направлена к Северному полюсу Земли, ось $B\xi$ была направлена в точку встречи нулевого меридиана с экватором Земли, а ось $B\eta$ — так, чтобы система отсчета была правоориентированной (ясно, что основная плоскость $B\xi\eta$ будет в этом случае совпадать с плоскостью экватора Земли). Такую систему отсчета можно назвать *географической*: географические координаты точек (широта, долгота) на поверхности Земли в этой системе отсчета с течением времени не будут меняться.

Аналогичную систему отсчета можно определить для Луны, для любой планеты или звезды.

---

*) Заметим, что в астрономии понимают обычно под азимутом угол $A_1 = 360° - A$.

Задачи

1. Звездным временем в данной точке B на земной поверхности в данный момент называется двугранный угол между полуплоскостью, проходящей через полярную ось Земли и точку осеннего равноденствия, и полуплоскостью, проходящей в данный момент через ось Земли и точку B. За единицу измерения этого угла принимают часто не градус, а «угловой час» (или просто «час»), причем $360° = 24$ угловым часам, 1 час $= 15°$.

В астрономических календарях обычно приводится звездное время в Гринвиче в полночь каждых суток или в полночь, с которой начинается месяц.

Спутник был замечен на станции наблюдения B в t часов по московскому времени. Звездное время в Гринвиче в полночь, предшествующую этому моменту наблюдения, составляло S_0 градусов. Пункт наблюдения B имеет долготу λ.

Каково было звездное время на станции в момент наблюдения спутника?

2. Долгота Смоленска $\lambda = 32°$, спутник наблюдался в 20 часов 7 мая 1960 года. Звездное время в Гринвиче в полночь с 30 апреля на 1 мая составляло $217{,}94°$. Найдите звездное время в Смоленске в момент наблюдения спутника.

3. На станции наблюдения B в момент t по московскому времени был замечен искусственный спутник Земли. Пусть известны прямоугольные горизонтальные координаты спутника в этот момент $(x_г, y_г, z_г)$, дата наблюдения и географические координаты станции наблюдения (φ^0, λ^0). Выведите формулы для вычисления экваториальных геоцентрических координат спутника $(x_э, y_э, z_э)$.

4. На станции B с географическими координатами (φ, λ) в t часов по московскому времени наблюдали прохождение спутника. Были найдены его горизонтальные сферические координаты ρ, h, A. Известна дата наблюдения.

Выведите формулы, определяющие экваториальные сферические координаты спутника r, δ, α.

5. Пусть известно, что в t часов по московскому времени спутник должен быть виден на станции визуальных наблюдений B и будет иметь геоцентрические экваториальные координаты r, δ, α. Известна также дата прохождения спутника над станцией B. Наблюдателям этой станции необходимо сообщить горизонтальные координаты (h, A) спутника в момент t. Каким образом можно вычислить эти координаты?

6. Известны элементы орбиты искусственного спутника Земли относительно геоцентрической экваториальной системы координат: $a = 7000$ *км*; $\varepsilon = 0{,}2$; $\gamma = 60°$; $\Omega = 90°$; $\omega = 45°$. По этим данным вычислите декартовы экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите затем экваториальные сферические координаты перигея r, δ, α.

7. Известны элементы орбиты спутника Ω, γ, ω относительно некоторой системы отсчета $Axyz$. Точка P имеет относительно орбитальной системы отсчета $A\xi\eta\zeta$ декартовы координаты $(0, 0, 1)$. Каковы ее координаты относительно системы отсчета $Axyz$?

§ 3. НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПОЛОЖЕНИЯМ СПУТНИКА

Мы научились по известным элементам орбиты спутника находить его положение в заданные моменты времени. В этом параграфе мы займемся обратной задачей: каким образом можно определить орбиту (то есть вычислить ее элементы) на основании нескольких наблюдений спутника?

Для нахождения шести элементов орбиты спутника достаточно, вообще говоря, знать два его положения P_1 и P_2 (относительно принятой системы отсчета) и моменты прохождения через эти точки. Выкладки упрощаются, если известны три положения спутника и момент его прохождения через одну из этих точек *).

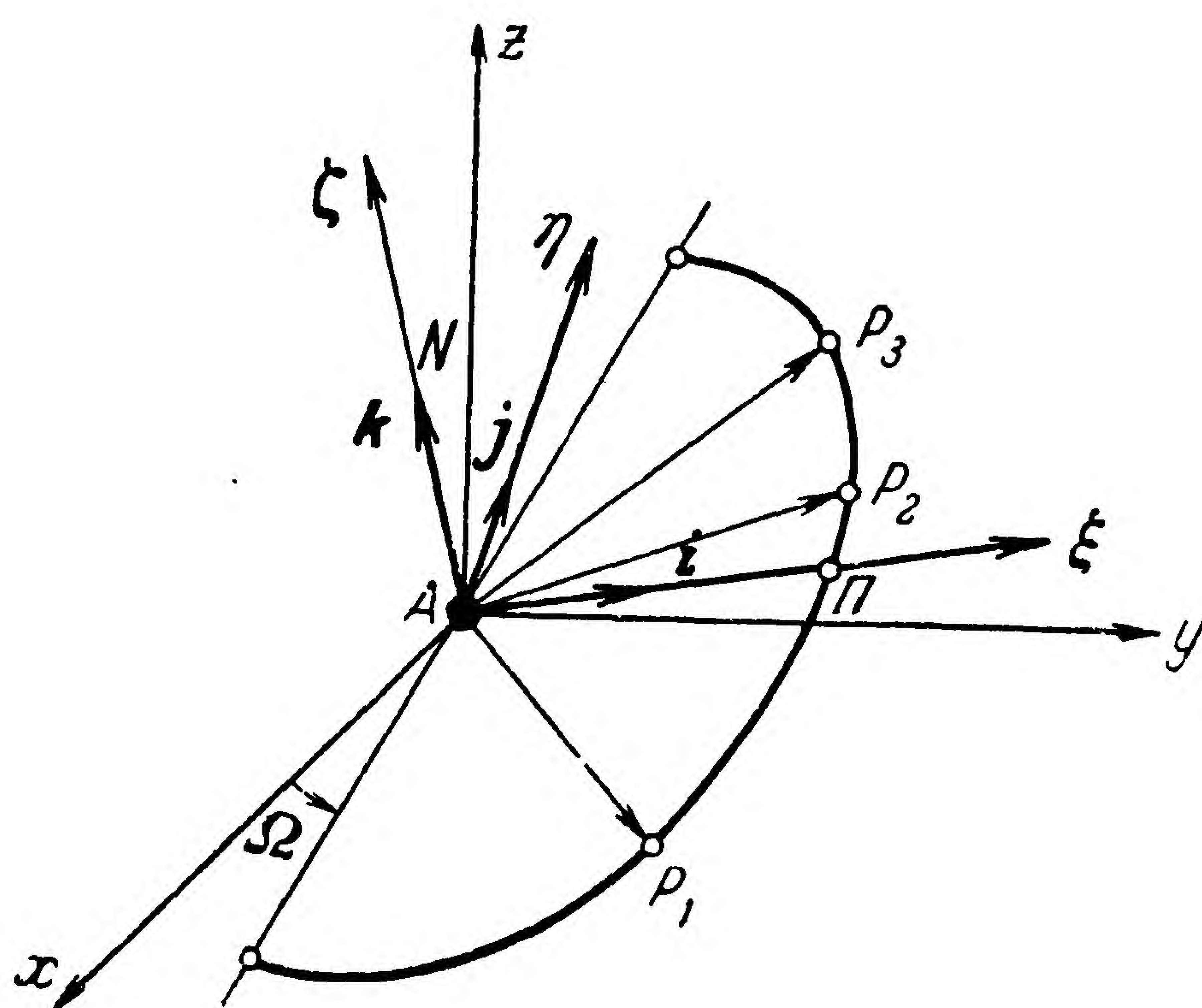


Рис. 4.7.

Итак, пусть в некоторой системе отсчета $Axyz$ (с началом в притягивающем центре) известны координаты трех точек P_1, P_2, P_3, через которые проходит орбита спутника (рис. 4.7). Обозначим через t_1, t_2, t_3 моменты прохождения спутника через эти точки. Пусть $\overrightarrow{AP_1} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{AP_2} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{AP_3} = \boldsymbol{r}_3$; $t_1 < t_2 < t_3$. По условию векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ известны.

Мы будем полагать, что притягивающий центр A не лежит ни на одной из прямых P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3.

1. Положение плоскости орбиты в пространстве определяется ортом нормали к этой плоскости. Этот орт можно

*) Полное решение задачи определения элементов орбиты спутника по известным двум его положениям может быть получено с помощью формулы Ламберта (ср. [4.7]).

найти по формуле

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|}. \tag{1}$$

С другой стороны, точка N с орбитальными координатами $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$ (конец орта $\boldsymbol{k}$ внешней нормали к плоскости орбиты) имеет в системе $Axyz$ координаты, определяемые матрицей

$$\begin{bmatrix} \sin \Omega \sin \gamma \\ -\cos \Omega \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \tag{2}$$

(см. § 2, задачу 7). Элементы этой матрицы являются одновременно координатами вектора $\overrightarrow{AN}$, то есть вектора $\boldsymbol{k}$. Сравнивая значения для одноименных компонент вектора $\boldsymbol{k}$ из выражений (1) и (2), мы сумеем найти Ω и γ (если $\sin \gamma \neq 0$).

2. Так как векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ компланарны (то есть лежат в одной и той же плоскости, а именно в плоскости орбиты), причем векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ не лежат (по допущению) на одной и той же прямой, то должны существовать такие вещественные константы c_1 и c_3, что

$$\boldsymbol{r}_2 = c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_3 \boldsymbol{r}_3. \tag{3}$$

Чтобы найти c_1 и c_3, умножим (3) справа векторно один раз на $\boldsymbol{r}_3$, а второй раз — на $\boldsymbol{r}_1$:

$$\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = c_1 (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3), \quad \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1 = c_3 (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1). \tag{4}$$

Отсюда можно получить величины c_1 и c_3.

3. Уравнение орбиты имеет вид $r = p/(1 + \varepsilon \cos \theta)$. Отсюда

$$p - r = \varepsilon \xi, \tag{5}$$

где ξ — проекция вектора $\boldsymbol{r}$ на ось апсид.

Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 проекции векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ на ось апсид. Из (3) следует, что $\xi_2 = c_1 \xi_1 + c_3 \xi_3$. Умножая это равенство на ε и учитывая (5), найдем

$$r_2 - p = c_1 (r_1 - p) + c_3 (r_3 - p). \tag{5a}$$

Из этого уравнения можно найти p.

4. Вычислим эксцентриситет ε. Обозначим орты осей орбитальной системы координат через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (вектор $\boldsymbol{i}$ направлен по линии апсид, вектор $\boldsymbol{j}$ лежит в плоскости орбиты и перпендикулярен к линии апсид, вектор $\boldsymbol{k}$ перпендикулярен к плоскости орбиты). Мы имеем

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{i} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|}[\boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}_1) - \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}_3)];$$

то есть

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|}(\xi_1\boldsymbol{r}_3 - \xi_3\boldsymbol{r}_1). \tag{6}$$

Умножая обе части равенства (6) на $\varepsilon|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|$ и учитывая (5), найдем

$$\varepsilon|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3|\boldsymbol{j} = (p - r_1)\boldsymbol{r}_3 - (p - r_3)\boldsymbol{r}_1. \tag{7}$$

Приравнивая модули обеих частей последнего равенства, получим уравнение для определения эксцентриситета ε

$$\varepsilon|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3| = |(p - r_1)\boldsymbol{r}_3 - (p - r_3)\boldsymbol{r}_1|. \tag{8}$$

5. Орты $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{j}$ вычисляются при помощи уравнений (1) и (7). После этого можно вычислить орт $\boldsymbol{i}$ оси апсид по формуле

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Орт β линии узлов $A\Omega$ определяется формулой

$$\beta = \cos\Omega\cdot\boldsymbol{I} + \sin\Omega\cdot\boldsymbol{J}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}$ — орты осей Ax и Ay (см. рис. 4.7). Зная орт линии узлов β и орт линии апсид $\boldsymbol{i}$, легко найти и угол ω между ними.

6. Найдем момент t_0 прохождения спутника через перицентр. Ограничимся случаем эллиптического движения. Пусть известен момент t_2 прохождения спутника через точку P_2. Обозначим эксцентрическую аномалию спутника в этот момент через E_2. Тогда

$$\boldsymbol{r}_2 = a(\cos E_2 - \varepsilon)\boldsymbol{i} + b\sin E_2\boldsymbol{j} \tag{11}$$

(см. формулу (3.4.17)).

Так как p и ε известны, то легко вычислить a и b:

$$a = p\,(1 - \varepsilon^2),\ b^2 = a^2\,(1 - \varepsilon^2),$$

Из (11) следует, что

$$a\,(\cos E_2 - \varepsilon) = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{i},\ b \sin E_2 = \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{j}. \tag{12}$$

Из системы (12) можно найти угол E_2. При помощи уравнения Кеплера

$$E_2 - \varepsilon \sin E_2 = n\,(t_2 - t_0) \tag{13}$$

легко теперь вычислить момент t_0.

Задачи

1. Космическая ракета наблюдалась над пунктом P_1 с географическими координатами $\varphi_1 = 30°$, $\lambda_1 = 90°$. А через 6 часов она оказалась над пунктом P_2 с географическими координатами $\varphi_2 = 60°$, $\lambda_2 = 180°$. Полет совершается в таких условиях, что можно учитывать только тяготение ракеты к Земле и считать, что Земля имеет сферическую структуру. Вычислите наклонение орбиты к плоскости экватора.

2. В 12 часов дня по московскому времени 1 апреля 1960 года на одной из станций наблюдался спутник Земли. Были измерены его горизонтальные сферические координаты ρ, h, A и по этим данным затем вычислены его экваториальные декартовы координаты. Они оказались равными (d, d, d), где $d = 20\,000$ *км*. Аналогичные наблюдения были выполнены над тем же спутником на двух других станциях: на одной — утром того же дня, на другой — вечером. Экваториальные геоцентрические координаты спутника оказались такими: $P_1\,(2d, d, 0)$ (результаты утренних наблюдений) и $P_3\,(-d, 0, d)$ (вечерние наблюдения). Звездное время в Гринвиче в полночь на 1 апреля было 188,37°. Требуется по этим данным вычислить элементы орбиты спутника.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО ЕГО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ В ОДИН МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Пусть в момент t_1 известны радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}_1$ спутника относительно притягивающего центра A с гравитационным параметром K. Требуется найти элементы орбиты спутника.

1. Положение плоскости орбиты определяется ортом нормали к этой плоскости $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1|}. \tag{1}$$

Зная вектор $\boldsymbol{k}$, легко найти Ω и γ (см. предыдущий параграф).

2. Будем теперь рассматривать движение в орбитальной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$. В силу второго закона Кеплера

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\sigma}, \, |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1| = \sigma. \qquad (2)$$

Зная константу площадей σ, можем найти параметр орбиты p:

$$p = \sigma^2/K. \qquad (3$$

3. Константа энергии h вычисляется по формуле $h = v_1^2 - 2K/r_1$. Теперь можно вычислить эксцентриситет орбиты:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \qquad (4)$$

4. Вектор $\boldsymbol{v}_1$ можно однозначно разложить на радиальную и поперечную составляющие v_{1r} и v_{1n}. Действительно, если $\boldsymbol{\lambda}$ — орт вектора $\boldsymbol{r}_1$, то

$$v_{1r} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda}, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{v}_{1n} = \boldsymbol{v}_1 - v_{1r}\boldsymbol{\lambda}. \qquad (6)$$

Из уравнения орбиты следует, что $r_1 = p/(1 + \varepsilon \cos \theta_1)$, откуда можно найти $\cos \theta_1$; знак же $\sin \theta_1$ найдем из уравнения для радиальной составляющей скорости: $v_{1r} = \frac{\sigma}{p}\varepsilon \sin \theta_1$. Поэтому мы сумеем найти и угол θ_1 (в пределах между 0 и 2π).

Орт $\boldsymbol{\beta}$ линии узлов можно считать известным: он может быть найден с помощью вектора $\boldsymbol{k}$ так же, как это было сделано в § 3.

Чтобы найти угол ω (угловое расстояние перицентра от узла), получим сначала угол $\omega + \theta_1$. Но это есть угол между двумя известными единичными векторами $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, и поэтому

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \cos(\omega + \theta_1), \; \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\lambda} = \sin(\omega + \theta_1)\,\boldsymbol{k}, \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{k}$ определяется по формуле (1). Из формул (7) однозначно определяется угол $\omega + \theta_1$ так, чтобы имели место неравенства

$$\theta_1 \leqslant \omega + \theta_1 < \theta_1 + 2\pi.$$

Зная $\omega + \theta_1$ и θ_1, найдем и ω.

5. Остается еще вычислить момент t_0 прохождения спутника через перицентр Π. Ограничимся случаем эллиптического движения.

Нам известна истинная аномалия θ_1 спутника в момент t_1. Поэтому эксцентрическую аномалию E_1 в этот момент можно определить по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}.$$

А зная E_1, вычислим t_0 из уравнения Кеплера:

$$E_1-\varepsilon\sin E_1=n\,(t_1-t_0).$$

Момент t_0 в случае гиперболической орбиты может быть получен аналогично.

Задачи

1. Известны гравитационный параметр притягивающего центра K, векторная константа площадей $\boldsymbol{\sigma}$, вектор Лапласа $\boldsymbol{\lambda}$. Вычислите по этим данным ε, a, Ω, γ, ω.

2. Пользуясь решением предыдущей задачи, укажите способ вычисления элементов орбиты спутника, если известны его радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и вектор скорости $\boldsymbol{v}$ в какой-то один момент времени t_1.

§ 5. УТОЧНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПО МНОГИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

1. В §§ 3 и 4 настоящей главы были изложены способы нахождения элементов орбиты спутника по трем известным положениям спутника в три момента времени или его положению и скорости в один момент. Однако получаемые таким образом элементы часто оказываются недостаточно точными из-за погрешностей в наблюдениях.

Можно получить более точные значения элементов, если использовать результаты многих наблюдений.

2. В § 3 мы рассмотрели способ определения элементов орбиты по нескольким положениям спутника в системе координат $Axyz$ с началом в центре Земли. Введем для элементов орбиты a, ε, Ω, γ, ω, t_0 обозначения a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 соответственно. Тогда для каждого момента

наблюдения t спутника мы будем иметь соотношения

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a_1, a_2, \ldots, a_6, t), \\ y &= y(a_1, a_2, \ldots, a_6, t), \\ z &= z(a_1, a_2, \ldots, a_6, t). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Если использовать эти соотношения для нескольких наблюдений (практически достаточно двух, но в § 3 мы для простоты использовали три), то из (1) мы получим достаточное число уравнений для определений шести неизвестных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

Фактически из каждого наблюдения мы получали три координаты спутника в декартовой системе координат $B\xi\eta\zeta$ с началом не в точке A, а в месте наблюдений B на поверхности Земли. Это могут быть и не прямоугольные координаты ξ, η, ζ, а какие-либо криволинейные (например, сферические) координаты ρ, φ, λ.

Будем считать, что нам известны формулы перехода от системы отсчета $Axyz$ к системе отсчета $B\xi\eta\zeta$. Иными словами, мы знаем формулы, которые в каждый момент времени t каждой тройке координат (x, y, z) сопоставляют однозначно тройку координат ρ, φ, λ, и наоборот,

$$\left.\begin{aligned} \rho = \rho(x, y, z), \ \varphi = \varphi(x, y, z), \ \lambda = \lambda(x, y, z); \\ x = x(\rho, \varphi, \lambda), \ y = y(\rho, \varphi, \lambda), \ z = z(\rho, \varphi, \lambda). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Таким образом, мы знаем зависимость ρ, φ, λ от элементов орбиты $a_1, \ldots, a_6$ и времени t:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho(a_1, \ldots, a_6, t), \\ \varphi &= \varphi(a_1, \ldots, a_6, t), \\ \lambda &= \lambda(a_1, \ldots, a_6, t). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Здесь в правой части написаны известные (может быть, громоздкие, но известные) функции. Допустим теперь, что в какой-то момент времени t_1 мы путем непосредственных наблюдений нашли одну из координат ρ, φ, λ, например φ:

$$\varphi = \varphi_1 \text{ при } t = t_1.$$

Тем самым мы получаем уравнение, которому должны удовлетворять шесть параметров орбиты:

$$\varphi (a_1, a_2, \ldots, a_6, t_1) = \varphi_1.$$

Если мы в момент t_1 сумеем из измерений найти еще λ_1, то получим еще одно уравнение для тех же шести элементов:

$$\lambda (a_1, \ldots, a_6, t_1) = \lambda_1. \qquad (4)$$

Из нескольких наблюдений мы таким образом можем найти систему нескольких (m) уравнений относительно элементов $a_1, \ldots, a_6$. Эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 (a_1, \ldots, a_6) = b_1, \\ \Phi_2 (a_1, \ldots, a_6) = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m (a_1, \ldots, a_6) = b_m. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Здесь $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — известные функции; $b_1, \ldots, b_m$ — известные константы, полученные из наблюдений. Если нам все элементы $a_1, \ldots, a_6$ (или некоторые из них) не известны, то их часто все же можно найти из системы уравнений (5), даже если $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ имеют очень громоздкий вид.

Если $m = 6$, то из системы шести уравнений (5) можно, вообще говоря, найти шесть неизвестных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_6$ (что мы фактически и делали в предыдущих параграфах). Однако эти значения элементов будут неточными из-за погрешностей наблюдений. Если использовать большое число наблюдений, то m будет больше шести и из (5) для определения шести неизвестных мы получим переопределенную (несовместную) систему уравнений (5).

В общем случае мы имеем дело со следующей задачей. Имеется система m уравнений

$$\Phi_k (a_1, \ldots, a_6, t_k) = b_k, \ k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (6)$$

с шестью неизвестными $a_1, \ldots, a_6$. Нам известны весьма грубые приближенные значения искомых величин

$$a_1 \approx a_1^{(0)}, \ a_2 \approx a_2^{(0)}, \ \ldots, \ a_6 \approx a_6^{(0)}. \qquad (7)$$

Требуется указать способ получения более точных значений неизвестных.

Вычислим значения функций Φ_k при $a_1 = a_1^{(0)}, \ldots, a_6 = a_6^{(0)}$. Пусть

$$\Phi_k\left(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)}, t_k\right) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\Delta_1 = a_1 - a_1^{(0)},\ \Delta_2 = a_2 - a_2^{(0)},\ \ldots,\ \Delta_6 = a_6 - a_6^{(0)}. \tag{9}$$

Считая функции Φ_k непрерывно дифференцируемыми и пренебрегая членами порядка выше первого относительно $\max|\Delta_k|$, мы можем написать приближенные равенства

$$\Phi_k(a_1, \ldots, a_6, t_k) - \Phi_k\left(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)}, t_k\right) = \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_1}\Delta_1 + \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_2}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_6}\Delta_6, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь частные производные вычисляются в точке $(a_1^{(0)}, \ldots, a_6^{(0)})$. Введем обозначение

$$\left.\frac{\partial\Phi_k}{\partial a_i}\right|_{\substack{a_1 = a_1^{(0)} \\ \ldots\ldots \\ a_6 = a_6^{(0)}}} = A_{ki}. \tag{10}$$

Если под $(a_1, \ldots, a_6)$ понимать именно ту группу шести чисел, которая является решением системы (6), то мы получим систему m линейных уравнений с шестью неизвестными $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}\Delta_1 + A_{12}\Delta_2 + \ldots + A_{16}\Delta_6 = B_1, \\ &A_{21}\Delta_1 + A_{22}\Delta_2 + \ldots + A_{26}\Delta_6 = B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_{m1}\Delta_1 + A_{m2}\Delta_2 + \ldots + A_{m6}\Delta_6 = B_m, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $B_1 = b_1 - \beta_1$, $B_2 = b_2 - \beta_2, \ldots, B_m = b_m - \beta_m$, причем $m > 6$.

Несовместную систему уравнений (11) нельзя решить «точно». Поэтому естественно найти приближенные значения поправок элементов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_6$, чтобы уравнения (11) удовлетворялись, в известном смысле, как можно точнее.

Это и делается *способом наименьших квадратов*, суть которого состоит в следующем.

Подбираем числа $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ так, чтобы оказалось минимальным следующее выражение:

$$\begin{aligned} T = (A_{11}\Delta_1 + A_{12}\Delta_2 + \ldots + A_{16}\Delta_6 - B_1)^2 + \\ + (A_{21}\Delta_1 + A_{22}\Delta_2 + \ldots + A_{26}\Delta_6 - B_2)^2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (A_{m1}\Delta_1 + A_{m2}\Delta_2 + \ldots + A_{m6}\Delta_6 - B_m)^2. \end{aligned} \qquad (12)$$

Для минимальности T необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta_1} = 0, \frac{\partial T}{\partial \Delta_2} = 0, \ldots, \frac{\partial T}{\partial \Delta_6} = 0. \qquad (13)$$

Мы получаем таким образом, для шести неизвестных $\Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_6$ шесть уравнений. Проводя выкладки, легко убедиться, что соотношения (13) приводят к системе шести линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + \ldots + a_{16}\Delta_6 = c_1, \\ a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + \ldots + a_{26}\Delta_6 = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{61}\Delta_1 + a_{62}\Delta_2 + \ldots + a_{66}\Delta_6 = c_6, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где коэффициенты a_{pq} и (c_q, p, $q = 1, \ldots, 6$) определяются по формулам

$$a_{pq} = A_{1p}A_{1q} + A_{2p}A_{2q} + \ldots + A_{mp}A_{mq},$$
$$c_q = A_{1q}B_1 + A_{2q}B_2 + \ldots + A_{mq}B_q.$$

Решая систему (14), найдем $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$.

После этого получаем новое — «первое» — приближение для элементов орбиты:

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)} + \Delta_1, \; a_2^{(1)} = a_2^{(0)} + \Delta_2, \ldots, a_6^{(1)} = a_6^{(0)} + \Delta_6.$$

Отправляясь от этих приближенных значений неизвестных $a_1, \ldots, a_6$ и проводя дословно такие же рассуждения, как для «нулевого» приближения, мы сумеем вычислить «второе» приближение этих неизвестных $a_1^{(2)}, \ldots, a_6^{(2)}$. Аналогично можно построить третье, четвертое приближения искомого решения $(a_1, \ldots, a_6)$.

В общем случае должна быть, строго говоря, специальным рассуждением доказана сходимость последовательных приближений $(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_6^{(\nu)})$ к точному решению $(a_1, \ldots, a_6)$ системы уравнений (6).

До сих пор мы говорили об уравнениях для параметров $a_1, \ldots, a_6$, получаемых на основании наблюдений *координат* спутника φ, λ, ρ (это могут быть, как мы уже отметили, любые декартовы или криволинейные его координаты). Но можно получить такие же уравнения из наблюдений каких-то *других характеристик* спутника, например радиальной составляющей его скорости.

Незначительно усложняя использованный здесь прием, можно учесть не только *результаты* наблюдений, но и качество, ценность, «вес» каждого такого результата по сравнению с другими (подробнее об этом см. [4.2], [4.6], [4.8]).

§ 6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРАССЫ СПУТНИКА ЗЕМЛИ

1. Под *трассой спутника* Земли понимают проекцию орбиты спутника на поверхность Земли. Та точка P' земной поверхности, над которой в данный момент времени находится спутник P, называется *подспутниковой точкой*. Иными словами, точка P' является проекцией точки P на поверхность Земли. Мы здесь ради простоты будем считать поверхность Земли идеальной сферой и условимся, что проектирование орбиты спутника на земную сферу производится из центра Земли.

Для многих советских спутников Земли в печати заранее сообщались моменты их прохождения над отдельными городами. В этом параграфе мы выясним, какие математические расчеты дают возможность получить такой прогноз.

Выберем две прямоугольные системы отсчета с началом в центре Земли O (рис. 4.8): одну $O\xi\eta\zeta$, вращающуюся вместе с Землей вокруг земной оси, вторую $Oxyz$, невращающуюся, постоянно ориентированную в пространстве.

Система $O\xi\eta\zeta$ выбирается так: ось $O\xi$ направляется в точку встречи нулевого (гринвичского) меридиана с экватором, ось $O\zeta$ — к Северному полюсу Земли, ось $O\eta$ выбирается так, чтобы система отсчета $O\xi\eta\zeta$ была правоориентированной.

Систему $Oxyz$ выбираем таким образом: за ось Ox принимаем то положение оси $O\xi$, которое она (ось $O\xi$) занимает в определенный, заранее выбранный нами момент времени t_0. (Это может быть, например, момент прохождения спутника через перигей или момент, когда ось $O\xi$ проходит через точку весеннего равноденствия, и т. д.; в каждом конкретном случае следует заранее договариваться относительно выбора этого момента.)

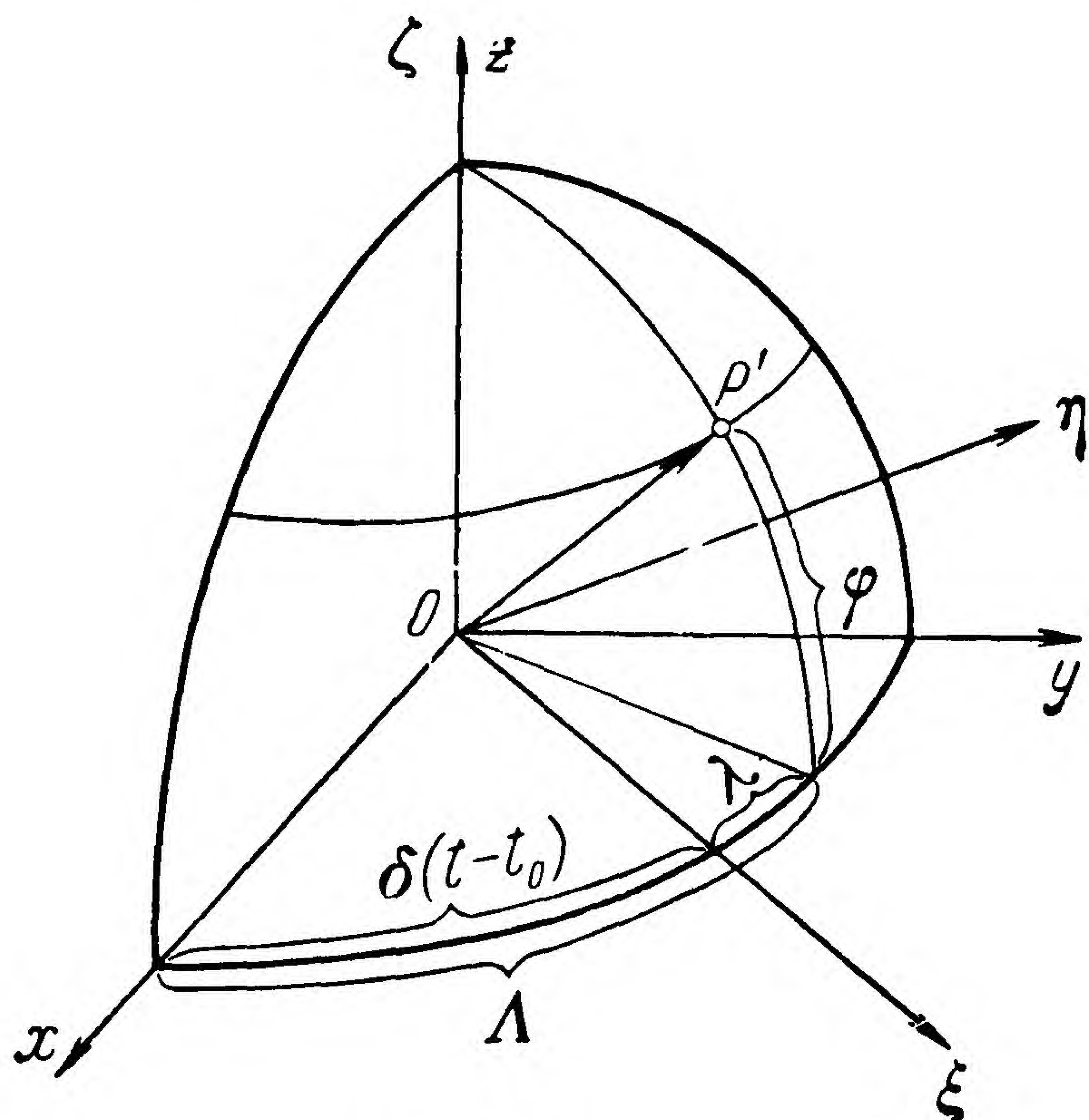


Рис. 4.8.

Ось Oz совместим с $O\zeta$, а ось Oy выберем так, чтобы система $Oxyz$ была правоориентированной. Очевидно, координатные плоскости Oxy и $O\xi\eta$ совпадают с плоскостью экватора Земли.

В момент t_0 оси вращающейся системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ совпадают с соответствующими осями невращающейся системы отсчета $Oxyz$. В системе отсчета $Oxyz$ Земля (и вместе с ней система отсчета $O\xi\eta\zeta$) вращается равномерно вокруг оси Oz.

В астрономии называют звездными сутками время, в течение которого Земля совершает полный оборот «относительно неподвижных звезд», то есть относительно системы отсчета с началом в центре Земли и осями, неизменно ориентированными в пространстве. Продолжительность звездных суток — 23 часа 56 минут (точнее, 86 164 секунд). Следовательно, за каждую минуту вращающаяся система отсчета $O\xi\eta\zeta$ (а вместе с ней и Земля) поворачивается относительно невращающейся системы отсчета $Oxyz$ на

следующий угол

$$\delta = \frac{360^\circ}{24 \cdot 60 - 4},$$

или

$$\delta = \frac{360^\circ}{24 \cdot 60} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{360}} \approx \frac{360^\circ}{24 \cdot 60}\left(1 + \frac{1}{360}\right),$$

то есть

$$\delta \approx \frac{361^\circ}{24 \cdot 60} \left(\text{точнее,} \quad \delta \approx \frac{360{,}986^\circ}{1440}\right). \tag{1}$$

В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ положение каждой точки на земной поверхности вполне характеризуется двумя географическими координатами: широтой φ ($-90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$) и долготой λ ($-180^\circ < \lambda \leqslant 180^\circ$).

В системе отсчета $Oxyz$ в любой момент времени t положение каждого пункта на поверхности Земли тоже можно охарактеризовать двумя сферическими координатами: широтой Φ и долготой Λ. Ясно, что

$$\Phi = \varphi \quad \text{и} \quad \Lambda = \lambda + \delta\,(t - t_0). \tag{2}$$

2. Мы будем рассматривать далее лишь спутники с малым эксцентриситетом ($\varepsilon < 0{,}2$), движущиеся на небольших расстояниях от Земли ($H_\alpha < 2000$ *км*).

Небольшая сплюснутость реальной Земли, наличие атмосферы, притяжение Солнца и Луны и другие факторы приводят к непрерывному изменению элементов орбиты такого спутника. Можно показать (см. главу VIII, § 2), что сплюснутость Земли приводит к равномерному изменению долготы восходящего узла орбиты Ω. В системе отсчета $Oxyz$ плоскость орбиты вращается вокруг оси Oz со скоростью $\dot{\Omega}$, приблизительно равной $-\frac{1}{140}(R/a)^{3{,}5}\cos\gamma$ градусов в минуту. Здесь R — радиус Земли, a — большая полуось орбиты спутника, знак минус указывает на то, что при $0 < \gamma < 90^\circ$ вращение плоскости орбиты (движение восходящего узла Ω) происходит в направлении, противоположном направлению вращения Земли вокруг ее оси, а при

$90° < \gamma < 180°$ орбита вращается в том же направлении, в котором вращается Земля вокруг своей оси; в том и другом случае орбита вращается в направлении, противоположном направлению движения проекции самого спутника на плоскость экватора. Такого рода равномерное вращение плоскости орбиты называют *прецессией*.

Для большинства советских спутников Земли 1957—1962 годов ($\gamma \approx 65°$) прецессия сказывалась в том, что плоскость орбиты поворачивалась примерно на $15'$ за каждый оборот спутника (то есть на 3—4° в сутки) в направлении, противоположном направлению вращения Земли вокруг ее оси.

При решении задач о прогнозировании трассы спутника Земли мы учтем прецессию орбиты. Изменение же других элементов орбиты учитывать не будем. Это не приведет к чувствительным погрешностям, если мы будем интересоваться прогнозом на небольшие промежутки времени (порядка одних-двух суток) *).

Учитывая *механический* эффект от сжатия Земли, а именно, вращение плоскости орбиты спутника, мы тем не менее в наших *геометрических* рассуждениях разрешим себе принимать поверхность Земли за сферу. Это допустимо ввиду малости сжатия Земли **).

3. В некоторых случаях орбита спутника Земли имеет настолько малый эксцентриситет, что ее без значительной погрешности можно считать окружностью. В случае круговой орбиты прогнозирование трассы спутника упрощается.

---

*) Сплюснутость Земли может привести к значительным изменениям еще одного параметра орбиты — аргумента перигея ω: вследствие сплюснутости происходит вращение перигея. Однако, если наклонение орбиты близко к «критическому» значению 63,4°, то это вращение перигея мало, и им можно пренебречь при прогнозах трассы на короткие сроки. Именно такое положение имело место для большинства советских спутников 1957—1962 годов ($\gamma \approx 65°$). Например, для каждого из первых трех советских спутников скорость вращения перигея орбиты составляла примерно 0,03° за один оборот. В дальнейших рассуждениях мы ради простоты ограничимся случаем, когда допустимо пренебречь вращением перигея орбиты.

**) Сжатие Земли характеризуют числом $\alpha = (R_э - R_п)/R_э$, где $R_э$ и $R_п$ — соответственно экваториальный и полярный радиусы Земли; согласно измерениям $\alpha \approx 1/298,3$.

Решим следующую задачу.

Задача 1. В момент t_0 «круговой» спутник находился над пунктом A земной поверхности с географическими координатами φ_0, λ_0. Известны наклонение γ плоскости орбиты к плоскости экватора (для определенности полагаем, что $0 < \gamma < 90°$) и период T обращения спутника вокруг Земли. Требуется предсказать, над каким пунктом земной поверхности будет находиться спутник в заданный момент времени t.

Рассмотрим сначала движение относительно невращающейся системы отсчета $Oxyz$ и не будем пока учитывать прецессию орбиты.

Если бы после момента t_0 Земля не вращалась и если бы не вращалась плоскость орбиты спутника, то спутник в момент t находился бы над некоторой точкой B земной поверхности со сферическими координатами (Φ, Λ) (в системе отсчета $Oxyz$).

На рис. 4.9 CAB — трасса спутника, $\smile{AD}$ и $\smile{BF}$ — дуги меридианов больших окружностей, перпендикулярных к экватору. Пусть градусные меры дуг CA, CD, CB, CF, DA, BF равны соответственно $\psi_0, \alpha_0, \psi, \alpha, \varphi_0, \varphi$. По известным формулам для прямоугольных сферических треугольников*)

$$\sin\psi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\gamma}, \tag{3}$$

$$\sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\gamma}. \tag{4}$$

По этим формулам можно найти дуги ψ_0 и α_0. Выбор нужного значения ψ_0 среди различных дуг, удовлетворяющих условию (3), можно произвести на основании дополнительных сведений о движении спутника, например по тому, каков был период обращения спутника T, проходил ли спутник над пунктом A с юга на север или наоборот, и т. п. Аналогично обстоит дело с выбором дуги α_0.

Так как спутник движется по круговой орбите равномерно, то за $t - t_0$ минут его проекция на Землю проходит

---

*) См. «Справочник любителя астрономии» П. Г. Куликовского.

дугу AB, содержащую $\frac{360^\circ}{T}(t - t_0)$ градусов. Поэтому

$$\psi = \psi_0 + \frac{360^\circ}{T}(t - t_0). \tag{5}$$

Для прямоугольного сферического треугольника BCF:

$$\sin\varphi = \sin\psi \sin\gamma, \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\psi \cos\gamma. \tag{7}$$

Отсюда найдем φ и α. Дуга DF равна, таким образом, $\alpha - \alpha_0$ (градусам). Значит, для точки B $\Lambda = \lambda_0 + \alpha - \alpha_0$. Учтем

Рис. 4.9.

теперь прецессию орбиты спутника. Так как плоскость орбиты спутника вращается со скоростью $\dot{\Omega}$ градусов за одну минуту, то за $(t - t_0)$ минут орбита успела повернуться (относительно системы отсчета $Oxyz$) на угол $\dot{\Omega}(t - t_0)$, так что спутник будет находиться в момент t над пунктом N с той же широтой Φ, но с долготой

$$\Lambda = \lambda_0 + \alpha - \alpha_0 + \dot{\Omega}(t - t_0). \tag{8}$$

Переходя теперь от системы отсчета $Oxyz$ к системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, определим географические координаты (φ, λ) той точки M *вращающейся* Земли, которая окажется в момент t под спутником. Из формул (8), (2) получим

$$\varphi = \Phi, \lambda = \lambda_0 + (\alpha - \alpha_0) + (\dot{\Omega} - \delta)(t - t_0). \qquad (9)$$

4. Приступая теперь к рассмотрению *некруговых* орбит, решим следующую задачу.

Задача 2. Искусственный спутник Земли в момент времени t_0 находился в своем перигее Π, который (в этот момент) оказался над пунктом A земной поверхности, имеющим географические координаты (φ_0, λ_0) (рис. 4.10). Известны следующие элементы орбиты спутника: угол γ наклона плоскости орбиты к плоскости экватора; период обращения спутника T, эксцентриситет орбиты ε. Требуется указать те моменты t, когда спутник будет находиться над пунктами с широтой φ. Какова будет в каждый такой момент времени долгота λ подспутниковой точки?

Для простоты ограничимся случаем $\varphi \geqslant \varphi_0 > 0$.

Рассмотрим сначала трассу в *невращающейся* системе отсчета $Oxyz$, причем *не* будем учитывать прецессию орбиты спутника. Пусть в момент t спутник оказался в точке Q, лежащей над φ-й параллелью. Проекцию спутника на земную сферу обозначим через B.

Введем обозначения для градусных мер дуг (рис. 4.10):

$$\smile{CA} = \omega, \smile{CD} = \alpha_0, \smile{CB} = \psi, \smile{CF} = \alpha.$$

Как и при решении задачи 1, мы можем найти ω и α_0 по формулам

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\gamma}, \quad \sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (10)$$

Дуги ψ и α найдем из соотношений

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}, \qquad (11)$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (12)$$

Может случиться, что условию (11) вовсе не удовлетворяет ни одна дуга. Это значит, что в своем движении спутник

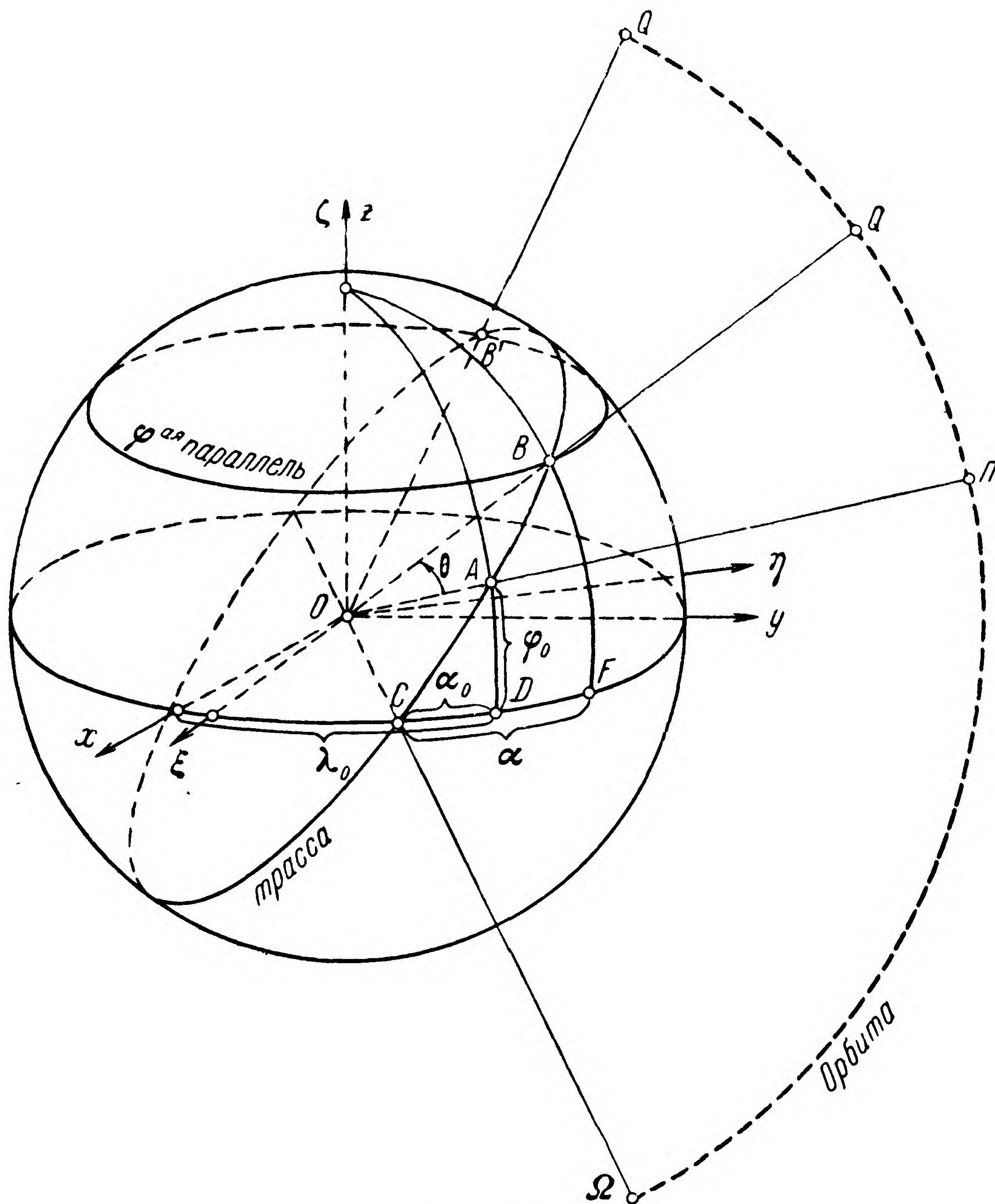


Рис. 4.10.

не доходит до параллели с широтой φ. В случае $0° < \gamma < 90°$ это будет, очевидно, иметь место, если $\varphi > \gamma$ или $\varphi < -\gamma$.

В остальных случаях условию (11) удовлетворяет бесконечное множество дуг. Если $\varphi = \gamma$ (или $\varphi = -\gamma$), то $\psi = 90° + 360° \cdot n$ или $\psi = 270° + 360° \cdot n$ (n — целое).

Пусть $\varphi_0 < \varphi < \gamma$. Обозначим через ψ_1 наименьшую положительную дугу, определяемую условием (11).

В пределах от 0° до 360° существуют две дуги ψ_1 и ψ_1' ($\psi_1' > \psi_1$), удовлетворяющие условию (11).

Аналогично существуют две дуги α_1 и α_1' ($\alpha_1' > \alpha_1$), заключенные между 0° и 360° и удовлетворяющие условию (12).

Перемещаясь по своей орбите от перигея $П$, спутник в какой-то момент t_1 пройдет (впервые после t_0) над параллелью с широтой φ. Пусть Q — положение спутника в этот момент, а B — его подспутниковая точка.

При дальнейшем движении спутника его трасса поднимается севернее данной параллели. Но затем через некоторое время она начнет спускаться к югу и в какой-то момент t_1' снова пересечет эту параллель в какой-то точке B'. Такая картина будет повторяться в течение каждого оборота спутника.

Нетрудно найти момент t_1. Истинная аномалия θ_1 точки Q равна $\psi - \omega$. По истинной аномалии можно вычислить эксцентрическую аномалию E_1 точки Q. Затем, пользуясь уравнением Кеплера, найдем t_1:

$$t_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}(E_1 - \varepsilon \sin E_1). \tag{13}$$

Если эксцентриситет ε мал (мы именно этот случай имеем в виду), то можно вычислить $t_1 - t_0$ с помощью более простой приближенной формулы (см. (3.1.8))

$$t_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{180}\theta_1 - 2\varepsilon \sin\theta_1\right) = T\left(\frac{\theta_1}{360} - \varepsilon\frac{\sin\theta_1}{\pi}\right). \tag{14}$$

В момент t_1 спутник пройдет над данной параллелью с юга на север. То же повторится в любой момент

$$t_k = t_1 + kT, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Рассуждая так же, как при решении задачи 1, найдем долготу Λ точки B:

$$\Lambda = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0.$$

Если же учесть прецессию орбиты спутника, то получим, что спутник должен оказаться над пунктом N_k с долготой

$$\Lambda_k = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0 + \dot{\Omega}\,(t_k - t_0).$$

Переходя от системы отсчета $Oxyz$ к вращающейся системе отсчета $O\xi\eta\zeta$, получим, что в момент t_k под спутником окажется пункт M_k с широтой φ и долготой

$$\lambda_k = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0 + (\dot{\Omega} - \delta)\,(t_k - t_0). \qquad (16)$$

Аналогично можно показать, что спутник пройдет над данной параллелью в момент t'_1, определяемый формулой

$$t'_1 - t_0 = \frac{T}{2\pi}\,(E'_1 - \varepsilon \sin E'_1),$$

где E'_1 — эксцентрическая аномалия точки орбиты спутника Q', лежащей над пунктом B'. Спутник пройдет над данной параллелью также в каждый момент t'_k, определяемый формулой

$$t'_k = t'_1 + (k-1)\,T. \qquad (17)$$

В каждый из этих моментов прохождение будет с севера на юг. При этом спутник будет проходить над пунктами M'_k с долготами

$$\lambda'_k = \lambda_0 + \alpha'_1 - \alpha_0 + (\dot{\Omega} - \delta)\,(t'_k - t_0). \qquad (18)$$

Задачи

1. Орбита советского ИСЗ «Космос-IV» (апрель 1962 года) была близка к окружности (H_α = 330 *км*, H_π = 298 *км*). Примем ради простоты, что эта орбита была окружностью и что «Космос-IV» двигался вокруг Земли на высоте 314 *км*. По сообщению ТАСС плоскость орбиты была наклонена к плоскости экватора под углом $\gamma = 65°00'$. Под каким углом пересекала трасса спутника земной экватор?

2. Спутник вращается вокруг Земли по окружности на высоте 230 *км* над Землей. Орбита проходит над обоими полюсами Земли (спутник полярный). Под каким углом пересекает трасса спутника экватор?

3. Орбита первого советского спутника была наклонена к плоскости экватора под углом 65°. Спутник прошел над головой наблюдателя, находящегося на экваторе, с юго-запада на северо-восток. В этот момент наблюдатель замерил видимый угол между трассой спутника и направлением на восток. Чему должен был оказаться равным этот угол? Решите аналогичную задачу, когда трасса спутника пересекает экватор с северо-запада на юго-восток. Данные о спутнике: H_α = 950 *км*, H_π = 230 *км*, $\omega = 58°$.

ГЛАВА V

ЗАДАЧА *n* ТЕЛ

§ 1. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

1. В предшествующих главах мы изучали движение космического аппарата под действием тяготения лишь одного небесного тела. Между тем правильнее было бы учитывать притяжение космического аппарата и к другим небесным телам, хотя бы к тем, которые оказывают на него наиболее сильное воздействие. Так, например, при анализе движения межпланетной станции, посылаемой к Марсу, целесообразно принимать во внимание тяготение Земли, Солнца Марса. При изучении движения ракет, посылаемых к Луне, необходимо учитывать не только влияние Земли, но и Луны, а также Солнца.

Все эти примеры вполне укладываются в рамки знаменитой проблемы n тел. В настоящей главе мы намерены вкратце рассмотреть некоторые основные результаты, относящиеся к этой проблеме. Мы выясним, в чем заключаются математические затруднения, возникающие при ее решении. Результаты этой главы будут использованы в дальнейшем при изложении приближенной методики расчета траекторий межпланетных аппаратов.

Задачу о n телах рассмотрим сначала в инерциальной системе отсчета.

2. Пусть в пространстве выбрана некоторая инерциальная система отсчета $O\xi\eta\zeta$. Предположим, что имеются n материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots \ldots, m_n$, причем в начальный момент времени t_0 известны их положения и скорости. Из всех сил, действующих на материальные точки $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$, будем учитывать только силы их взаимного тяготения. Нас интересует

вопрос: где окажется каждая из этих точек в любой наперед заданный момент t?

Ограничимся пока случаем только трех тел. Эти тела могут, например, представлять собой Солнце, Землю и Луну, или Солнце, Юпитер и Нептун, или космический корабль, Луну и Землю. Поскольку расстояния между телами обычно велики по сравнению с их размерами, можно считать массу каждого из этих тел сосредоточенной в его центре тяжести. Таким образом, три тела мы примем за три материальные *точки* A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 соответственно (рис. 5.1). Обозначим их координаты через (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), (ξ_3, η_3, ζ_3), радиусы-векторы $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_2$ и $\overrightarrow{OA}_3$ — соответственно через ρ_1, ρ_2, ρ_3; орты осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Очевидно,

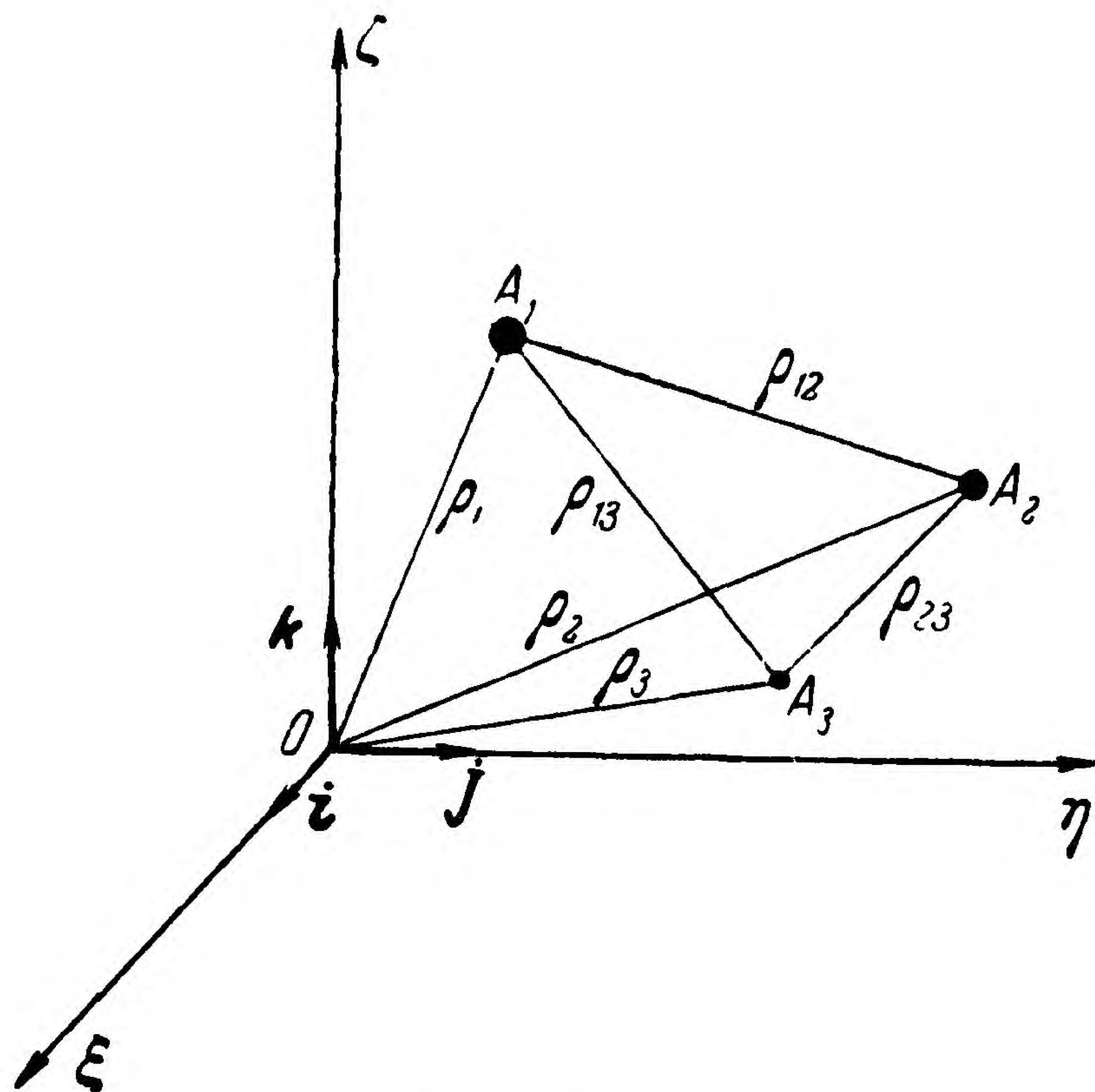


Рис. 5.1.

$$\rho_\nu = \xi_\nu \boldsymbol{i} + \eta_\nu \boldsymbol{j} + \zeta_\nu \boldsymbol{k}, \qquad \nu = 1, 2, 3. \tag{1}$$

На точку (A_1, m_1) действуют две силы: 1) сила $\boldsymbol{F}_{21}$, с которой ее притягивает точка (A_2, m_2); 2) сила $\boldsymbol{F}_{31}$, с которой ее притягивает точка (A_3, m_3). Суммарная сила, действующая на точку (A_1, m_1),

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}.$$

Величину проекции вектора $\boldsymbol{F}_1$ на ось $O\xi$ обозначим через $F_{1\xi}$; аналогичный смысл имеют величины $F_{1\eta}$, $F_{1\zeta}$; таким образом

$$\boldsymbol{F}_1 = F_{1\xi}\boldsymbol{i} + F_{1\eta}\boldsymbol{j} + F_{1\zeta}\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение движения точки (A_1, m_1) записывается на основании второго закона Ньютона в виде

$$m_1 \frac{d^2\varrho_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1. \tag{3}$$

В силу закона всемирного тяготения

$$\boldsymbol{F}_{21}=f\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1),\quad \boldsymbol{F}_{31}=f\frac{m_1m_3}{\rho_{13}^3}(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1),$$

где

$$\rho_{ij}=A_iA_j=|\boldsymbol{\rho}_i-\boldsymbol{\rho}_j|.$$

Поэтому уравнение (3) можно записать так:

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{\rho}_1}{dt^2}=f\left[\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)+\frac{m_1m_3}{\rho_{14}^3}(\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1)\right] \tag{4}$$

Векторное уравнение (4) равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2}&=F_{1\xi}\equiv f\left[\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\xi_2-\xi_1)+\frac{m_1m_3}{\rho_{13}^3}(\xi_3-\xi_1)\right],\\ m_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2}&=F_{1\eta}\equiv f\left[\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\eta_2-\eta_1)+\frac{m_1m_3}{\rho_{13}^3}(\eta_3-\eta_1)\right],\\ m_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}&=F_{1\zeta}\equiv f\left[\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\zeta_2-\zeta_1)+\frac{m_1m_3}{\rho_{12}^3}(\zeta_3-\zeta_1)\right].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Чтобы переписать эти уравнения в более компактной форме, введем в рассмотрение вспомогательную скалярную функцию, так называемую силовую функцию данной задачи:

$$U=f\left[\frac{m_1m_2}{\rho_{12}}+\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}\right], \tag{6}$$

или, короче,

$$U=f\sum_{\substack{s,\,\nu=1\\ \nu<s}}^{3}\frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}}. \tag{7}$$

Силовую функцию U можно наглядно истолковать как некоторую работу. Представим себе, что все три материальные точки $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$, $(A_3,\ m_3)$ «закреплены» в пространстве. «Открепим» точку $(A_3,\ m_3)$ и будем уносить ее в бесконечность. При этом придется преодолеть притя-

жение материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2). Для преодоления притяжения точки (A_1, m_1) придется совершить работу fm_1m_3/ρ_{13}; для преодоления притяжения точки (A_2, m_2) понадобится совершить работу fm_2m_3/ρ_{23}. Всего потребуется работа

$$f\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+f\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}.$$

После выведения точки A_3 в бесконечность «открепим» точку (A_2, m_2) и будем ее удалять в бесконечность. Для этого потребуется затратить работу fm_1m_2/ρ_{12}.

Значит, для того чтобы все три массы m_1, m_2, m_3 раздвинуть на бесконечно большие взаимные расстояния, потребуется совершить работу, равную

$$f\frac{m_1m_2}{\rho_{12}}+f\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+f\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}.$$

Итак, физический смысл силовой функции U — это работа, которую следует совершить, чтобы удалить три материальные точки на бесконечно большие расстояния друг от друга.

Вычислим $\partial U / \partial\xi_1$. Используя равенства

$$\rho_{12}=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2},$$
$$\rho_{13}=\sqrt{(\xi_3-\xi_1)^2+(\eta_3-\eta_1)^2+(\zeta_3-\zeta_1)^2},$$

найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial\xi_1}=f\frac{m_1m_2}{\rho_{12}^3}(\xi_2-\xi_1)+f\frac{m_1m_3}{\rho_{31}^3}(\xi_3-\xi_1),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial\xi_1}=F_{1\xi}. \tag{8}$$

Совершенно аналогично можно показать, что $\partial U/\partial\eta_1=F_{1\eta}$; $\partial U/\partial\zeta_1=F_{1\zeta}$. Поэтому формулу (2) для силы $\boldsymbol{F}_1$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{\partial U}{\partial\xi_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial\eta_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial\zeta_1}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Обозначим через $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ равнодействующие сил, действующих соответственно на точки A_2 и A_3.

Для точек A_2 и A_3 можно, разумеется, провести такие же рассуждения, как для точки A_1, и получить аналогичные формулы.

Таким образом, *движение системы трех гравитирующих материальных точек* (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) *определяется в инерциальной системе отсчета системой трех векторных дифференциальных уравнений*

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, 3, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}\boldsymbol{k}, \tag{11}$$

а функция U определяется формулой (6).

Каждое из векторных уравнений (10) можно заменить тремя скалярными уравнениями. Приравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ в левой и правой частях уравнений (10), получим следующую систему девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_\nu \frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}, \quad m_\nu \frac{d^2\eta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}, \quad m_\nu \frac{d^2\zeta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}, \tag{12}$$
$$\nu = 1, 2, 3.$$

3. При движении системы меняются положения точек и их скорости. Однако из системы (10) можно найти несколько таких функций от координат и скоростей трех материальных точек, которые остаются в течение всего движения неизменными, инвариантными. Они имеют вид

$$\Phi\,(t, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3, \dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2, \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = C = \text{const}. \tag{13}$$

Зависимости вида (13) называют *первыми интегралами* системы (10). Записывая эти зависимости в координатном виде, получим первые интегралы системы (12):

$$\Psi\,(t, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_3; \dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\zeta}_3) = C = \text{const} \tag{14}$$

§ 2. ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

1. Интегралы движения барицентра системы. В предыдущем параграфе мы обозначили через $\boldsymbol{F}_{\nu s}$ силу, с которой точка (A_ν, m_ν) притягивает точку (A_s, m_s). Из третьего закона динамики следует, что

$$\boldsymbol{F}_{\nu s} = - \boldsymbol{F}_{s\nu}. \tag{1}$$

Уравнение движения точки (A_1, m_1) можно записать в виде

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}. \tag{2}$$

Аналогично для двух других точек (A_2, m_2), (A_3, m_3)

$$m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{12}, \tag{3}$$

$$m_3\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23}. \tag{4}$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая (1), найдем:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 + m_3\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = 0.$$

Дважды интегрируя это уравнение, получим:

$$m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{a}, \tag{5}$$

$$m_1\boldsymbol{\rho}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 + m_3\boldsymbol{\rho}_3 = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

Формулы (5) и (6) представляют собой первые интегралы системы (5.1.10).

Пусть C — барицентр (центр масс, центр тяжести) системы трех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), $\boldsymbol{\rho}_C$ — радиус-вектор этой точки, то есть $\overrightarrow{OC}$, m — масса всей системы:

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \tag{7}$$

Тогда

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{m}(m_1\boldsymbol{\rho}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 + m_3\boldsymbol{\rho}_3). \tag{8}$$

Поэтому равенства (5) и (6) могут быть записаны в виде

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_C = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{m}(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}). \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) (а значит, и равносильные им равенства (5) и (6)) выражают тот факт, что *барицентр системы движется в инерциальном пространстве равномерно и прямолинейно*. Вектор $\boldsymbol{b}$ определяет начальное положение барицентра, а вектор $\boldsymbol{a}$ — его скорость. Равенства (5) и (6) носят название «*интегралов движения барицентра системы*».

2. Интегралы площадей. Умножая равенства (2), (3) и (4) векторно слева соответственно на $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ и $\boldsymbol{\rho}_3$ и складывая их почленно, получим:

$$m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \\ = (\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12}) + (\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{F}_{23}) + \\ + (\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{31}). \tag{11}$$

Но $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, так что

$$\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} = \\ = (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0,$$

ибо векторы $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{F}_{12}$ коллинеарны. Аналогичные рассуждения показывают, что и два других выражения в скобках правой части равенства (11) равны нулю. Итак,

$$m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}_3) = 0.$$

Это равенство можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_3)] = 0.$$

Отсюда

$$m_1(\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + m_3(\boldsymbol{\rho}_3 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) = \boldsymbol{\sigma}, \tag{12}$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{3} m_\nu(\boldsymbol{\rho}_\nu \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — постоянный вектор.

Произведение массы m материальной точки (A, m) на векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ точки A (относительно некоторого начала отсчета O) и скорости $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ этой точки называют в механике *кинетическим моментом точки* (A, m) относительно точки O. Кинетический момент — это вектор. По абсолютной величине кинетический момент точки равен произведению массы m на абсолютную величину ее скорости v $(\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\rho}})$ и на расстояние OD от точки O до прямой, на которой лежит вектор скорости (рис. 5.2). Под *кинетическим моментом системы нескольких материальных точек* понимают сумму кинетических моментов всех точек системы.

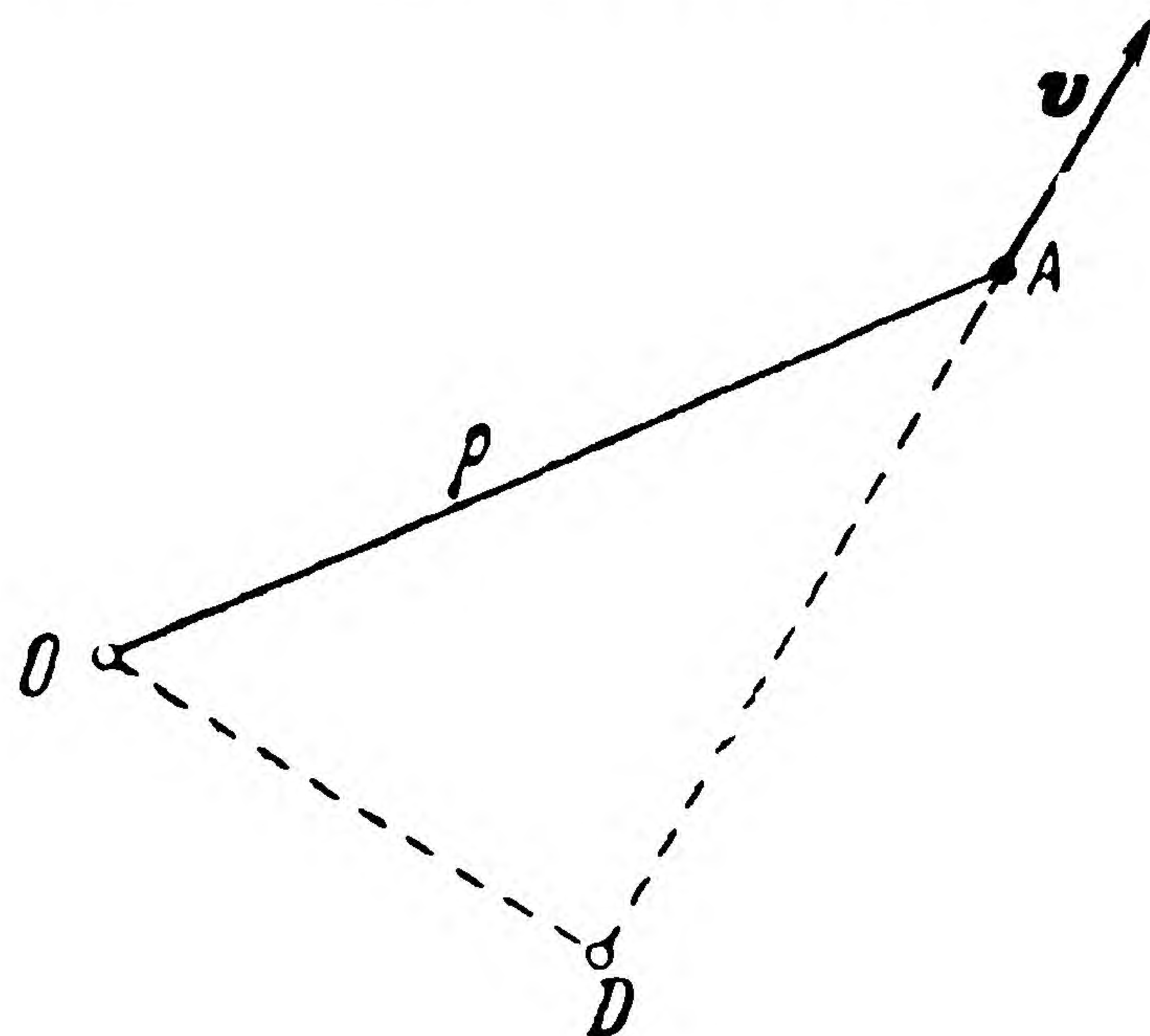


Рис. 5.2.

Формула (12) показывает, что *кинетический момент системы трех гравитирующих точек остается неизменным*. Эту формулу можно было бы назвать *интегралом сохранения кинетического момента*.

Пусть $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \boldsymbol{i} + \sigma_2 \boldsymbol{j} + \sigma_3 \boldsymbol{k}$. Переходя в формуле (12) к записи в координатах, получим

$$m_1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dot{\xi}_1 & \dot{\eta}_1 & \dot{\zeta}_1 \end{vmatrix} + m_2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dot{\xi}_2 & \dot{\eta}_2 & \dot{\zeta}_2 \end{vmatrix} + m_3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \dot{\xi}_3 & \dot{\eta}_3 & \dot{\zeta}_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \boldsymbol{i} + \sigma_2 \boldsymbol{j} + \sigma_3 \boldsymbol{k}.$$

Отсюда получаем три скалярных интеграла движения:

$$m_1 (\eta_1 \dot{\zeta}_1 - \zeta_1 \dot{\eta}_1) + m_2 (\eta_2 \dot{\zeta}_2 - \zeta_2 \dot{\eta}_2) + m_3 (\eta_3 \dot{\zeta}_3 - \zeta_3 \dot{\eta}_3) = \sigma_1, \quad (14)$$

$$m_1 (\zeta_1 \dot{\xi}_1 - \xi_1 \dot{\zeta}_1) + m_2 (\zeta_2 \dot{\xi}_2 - \xi_2 \dot{\zeta}_2) + m_3 (\zeta_3 \dot{\xi}_3 - \xi_3 \dot{\zeta}_3) = \sigma_2, \quad (15)$$

$$m_1 (\xi_1 \dot{\eta}_1 - \eta_1 \dot{\xi}_1) + m_2 (\xi_2 \dot{\eta}_2 - \eta_2 \dot{\xi}_2) + m_3 (\xi_3 \dot{\eta}_3 - \eta_3 \dot{\xi}_3) = \sigma_3. \quad (16)$$

Пусть точки A_1, A_2, A_3 описывают в пространстве линии Γ_1, Γ_2, Γ_3. Проекции B_1, B_2, B_3 этих точек на плоскость

$\xi O\eta$ опишут линии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Эти проекции B_1, B_2, B_3 имеют относительно O определенные секториальные скорости dS_1/dt, dS_2/dt, dS_3/dt. Можно показать, что

$$\xi_\nu \dot{\eta}_\nu - \eta_\nu \dot{\xi}_\nu = 2\frac{dS_\nu}{dt}, \quad \nu = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Под *средней секториальной скоростью* (или взвешенным средним секториальных скоростей) точек B_1, B_2, B_3 понимают величину

$$\frac{1}{m}\left(m_1\frac{dS_1}{dt} + m_2\frac{dS_2}{dt} + m_3\frac{dS_3}{dt}\right) \tag{18}$$

(здесь $m = m_1 + m_2 + m_3$).

Формула (16) показывает, что *средняя секториальная скорость проекций точек* A_1, A_2, A_3 на плоскость $\xi O\eta$ остается постоянной. Аналогично обстоит дело с проекциями средней секториальной скорости на любую другую плоскость. Отсюда полученные первые интегралы движения (12) и (14) — (16) определяют изменение площадей, описываемых проекциями радиусов-векторов точек A_1, A_2 и A_3. Поэтому эти интегралы называют *интегралами площадей*.

3. Интеграл энергии. Умножим уравнения движения (5.1.10)

$$m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \boldsymbol{F}_1, \; m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \boldsymbol{F}_2, \; m_3\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{F}_3$$

почленно скалярно на $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}_2$, $\dot{\boldsymbol{\rho}}_3$ и сложим. Тогда получим

$$m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3\cdot\ddot{\boldsymbol{\rho}}_3 = \boldsymbol{F}_1\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \boldsymbol{F}_2\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \boldsymbol{F}_3\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_3.$$

При помощи формул (1) и (11) из § 1 отсюда находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^2 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3^2) = \\ = \frac{\partial U}{\partial\xi_1}\frac{d\xi_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial\eta_1}\frac{d\eta_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial\zeta_3}\frac{d\zeta_3}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

где U — определяется формулой (5.1.6). Отсюда, интегрируя, имеем:

$$\frac{1}{2}(m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^2 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^2 + m_3\dot{\boldsymbol{\rho}}_3^2) = U + h, \tag{19}$$

где h — константа.

Левая часть равенства (19) — кинетическая энергия системы. Формула (19) дает выражение кинетической энергии через силовую функцию U. Равенство (19) называют *интегралом энергии* (или интегралом живых сил).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЗАДАЧИ n ГРАВИТИРУЮЩИХ ТОЧЕК В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Результаты, полученные выше для случая трех гравитирующих точек, переносятся тривиальным образом на случай любого числа гравитирующих точек. Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой основных результатов для этого более общего случая.

1. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета; $\{(A_\nu,\ m_\nu)\}$, $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— система n гравитирующих материальных точек, $\boldsymbol{\rho}_\nu = \overrightarrow{OA}_\nu$ — радиус вектор-точки A_ν. Движение этих точек описывается системой n векторных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_\nu}{dt^2} = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1\\ s\neq\nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \tag{2}$$

Здесь $\rho_{\nu s}$ — расстояние между точками A_ν и A_s.

2. Функция

$$U = f \sum_{\substack{s,\ \nu=1\\ \nu<s}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{\rho_{\nu s}} \tag{3}$$

называется *силовой функцией системы n точек*. С ее помощью можно $\boldsymbol{F}_\nu$ записать так:

$$\boldsymbol{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu} \boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu} \boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu} \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

3. Систему n векторных уравнений (1) можно заменить системой $3n$ скалярных уравнений

$$\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}, \quad \frac{d^2\eta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_\nu}, \quad \frac{d^2\zeta_\nu}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

4. Из системы (1) вытекают следующие зависимости (первые интегралы):

а) интегралы движения барицентра системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \boldsymbol{a}, \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \tag{7}$$

($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы); эти интегралы можно переписать так:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_C = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{m}(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\rho}_C$ — радиус-вектор барицентра C системы, а m — суммарная масса системы;

б) интеграл площадей

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\boldsymbol{\rho}_\nu \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}; \tag{9}$$

в) интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu^2 = U + h. \tag{10}$$

Значения констант $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\sigma}$, h могут быть найдены, если известны координаты и скорости точек A_ν в произвольный («начальный») момент времени t_0.

5. Каждая из трех векторных зависимостей (6), (7), (9) может быть заменена тремя скалярными равенствами. Всего, таким образом, мы получим для системы (5) десять первых интегралов.

6. Десять первых интегралов системы, о которых мы говорили выше, известны уже более двухсот лет. Несмотря на многочисленные попытки, в течение этого времени не удалось найти ни одного нового первого интеграла, не являющегося логическим следствием из предыдущих.

Неудачи этих попыток оказались не случайными, ибо в конце XIX и начале XX века было показано, что если новые интегралы и существуют, то они должны быть весьма сложной структуры.

В 1887 году немецкий астроном и математик Г. Брунс доказал следующую теорему:

Если между декартовыми координатами и компонентами скоростей трех взаимно гравитирующих материальных точек существует алгебраическая зависимость, то она обязательно является следствием из известных десяти первых интегралов задачи трех тел.

Эту теорему обобщил на задачу n тел, а затем уточнил французский математик П. Пенлеве. Теорема Пенлеве гласит:

Каждый интеграл задачи n тел, в которой входят алгебраически (декартовы) компоненты скоростей гравитирующих точек (координаты могут входить любым образом, алгебраически или неалгебраически), является следствием известных десяти классических интегралов.

7. Мы видели, что задача трех тел сводится к решению системы трех векторных дифференциальных уравнений второго порядка, а следовательно, девяти скалярных уравнений второго порядка.

В теории дифференциальных уравнений устанавливается, что знание каждого нового первого интеграла (в скалярной форме) позволяет понизить порядок системы на единицу.

Знание десяти первых интегралов задачи трех тел позволяет свести ее к системе восьмого порядка (18—10). Особенности структуры самих уравнений задачи трех тел позволяют свести ее решение к системе шестого порядка (и еще двум квадратурам).

Аналогично решение задачи n тел сводится к решению системы порядка $6n$. Но знание ее десяти первых интегралов и особенности структуры уравнений позволяют свести ее к системе порядка $6n - 12$.

8. В настоящее время разработаны достаточно мощные методы приближенного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, и систему дифференциальных уравнений задачи трех тел можно решить приближенно для любого заданного конечного промежутка времени. При этом с увеличением промежутка времени значительно возрастает объем вычислительной работы. Задавшись начальными данными [координатами и компонентами скоростей трех гравитирующих точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)], мы можем после некоторой серии арифметических оычислений найти координаты каждой из этих точек через впределенные (малые) промежутки времени. Для другого набора начальных данных требуется, вообще говоря, весь расчет произвести заново.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ИХ БАРИЦЕНТРА

1. Дифференциальные уравнения задачи и первые интегралы. Под движением системы точек относительно некоторой точки C мы понимаем ее движение относительно прямоугольной системы координат $CXYZ$ с началом в точке C и осями, сохраняющими неизменные направления в пространстве.

Возьмем в качестве точки C барицентр (центр масс) материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n).

Наряду с системой отсчета $CXYZ$ рассмотрим инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$; пусть соответствующие координатные оси этих систем одинаково направлены. Введем обозначения: $\overrightarrow{OA_\nu} = \boldsymbol{\rho}_\nu$, $\overrightarrow{CA_\nu} = \boldsymbol{R}_\nu$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\rho}_C$, $A_\nu A_s = R_{\nu s}$ ($\nu, s = 1, 2, \ldots, n$). Ясно, что

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_\nu. \qquad (1)$$

В системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ имеет место второй закон Ньютона. Поэтому

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq \nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}^3} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu). \qquad (3)$$

Но

$$\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_\nu = (\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_s) - (\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{R}_\nu) = \boldsymbol{R}_s - \boldsymbol{R}_\nu,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{F}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\nu}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}^3}(\boldsymbol{R}_s - \boldsymbol{R}_\nu). \tag{4}$$

В силу равенства (1)

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_C + \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu. \tag{5}$$

Из интеграла движения барицентра системы (5.3.8) следует, что $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_C = 0$. Поэтому $\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu$ и, следовательно, формулы (2) принимают вид

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Итак, движение n рассматриваемых точек в системе отсчета $CXYZ$ описывается системой n дифференциальных уравнений (6), где функции $\boldsymbol{F}_\nu$ определяются формулой (4).

Но формулы (6) и (4) могут быть формально получены соответственно из формул (5.3.1) и (5.3.2), если в последних попросту заменить букву $\boldsymbol{\rho}$ с индексами буквой $\boldsymbol{R}$ с теми же индексами. Поэтому если в каком-либо логическом следствии из формул (5.3.1) и (5.3.2) формально заменим $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{R}$, то получим логическое следствие из формул (6) и (4). В частности, в системе отсчета $CXYZ$ имеют место зависимости, аналогичные соотношениям (6) — (10) из § 3 (но с другими константами, чем в системе отсчета $O\xi\eta\zeta$):

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = \boldsymbol{a}_1 \tag{7}$$

(здесь $\boldsymbol{V}_\nu \equiv \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$),

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = \boldsymbol{a}_1 t + \boldsymbol{b}_1, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\boldsymbol{R}_\nu \times \boldsymbol{V}_\nu) = \boldsymbol{\sigma}_1, \tag{9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu^2 = U + h, \tag{10}$$

где h — скалярная константа, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_1$ — постоянные векторы, а

$$U = f \sum_{\substack{\nu, s=1 \\ \nu < s}}^{n} \frac{m_\nu m_s}{R_{\nu s}}. \tag{10'}$$

Величины $\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu$ и $\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu$ представляют собой радиус-вектор и скорость барицентра рассматриваемой системы точек, то есть точки C. Но при нашем специальном выборе системы координат точка C все время остается началом координат, так что оба эти вектора неизменно равны нулю:

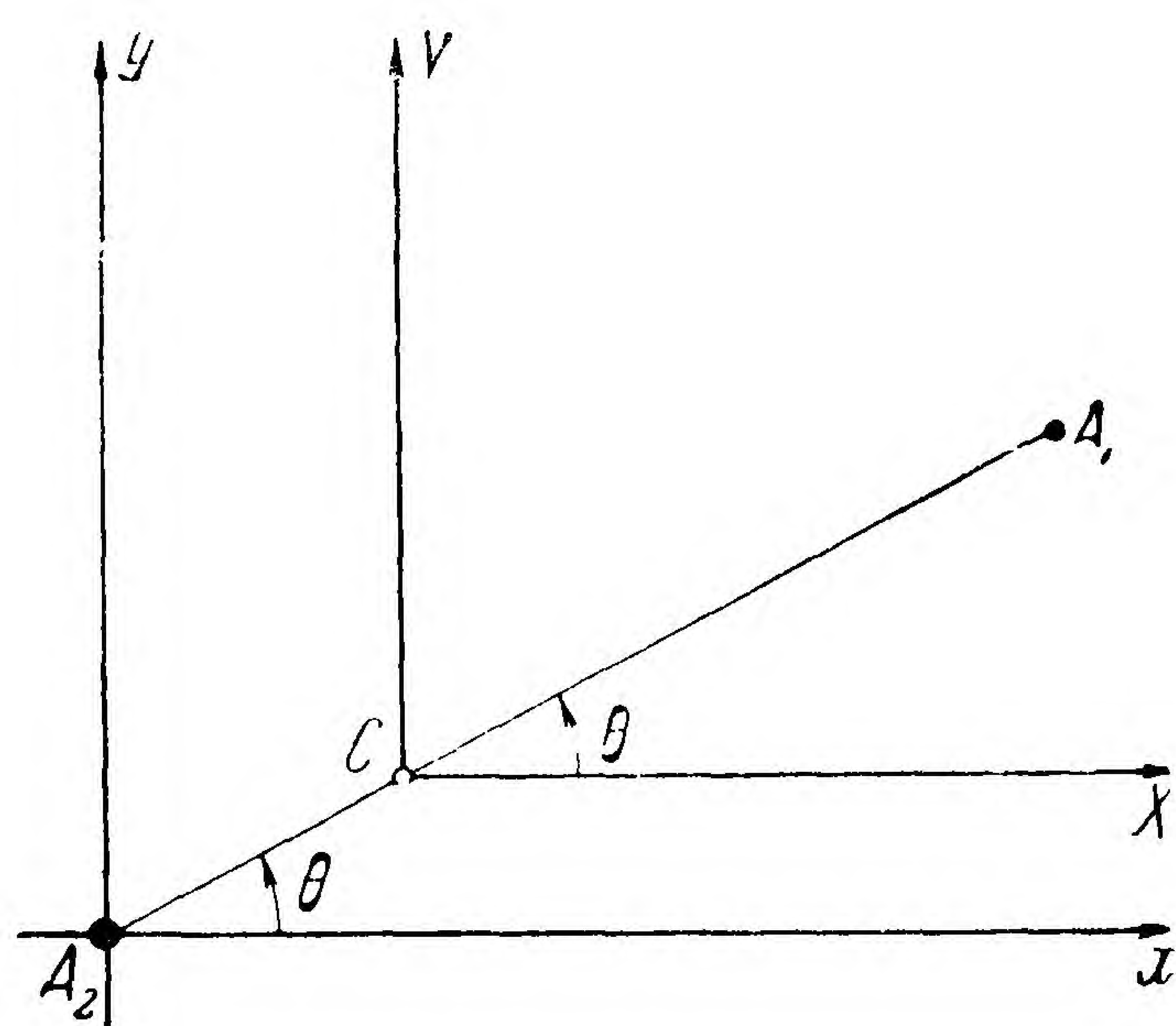


Рис. 5.3.

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = 0. \tag{12}$$

2. Движение двух материальных точек относительно их барицентра (рис. 5.3).

Пусть точка C — барицентр двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2). Плоскость, в которой происходит движение одной из двух точек относительно другой, примем за плоскость XCY. Дифференциальные уравнения движения этих точек [см. (6) и (4)] примут вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = f\frac{m_2}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1), \quad \frac{d^2\boldsymbol{R}_2}{dt^2} = f\frac{m_1}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2). \tag{13}$$

Формула (11) запишется так:

$$m_1\boldsymbol{R}_1 + m_2\boldsymbol{R}_2 = 0. \tag{14}$$

Она выражает тот известный факт, что барицентр двух материальных точек лежит на отрезке, соединяющем эти точки, и его расстояния от этих точек обратно пропорциональны их массам («правило рычага Архимеда»).

Формула (12) дает

$$m_1 \boldsymbol{V}_1 + m_2 \boldsymbol{V}_2 = 0, \tag{15}$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$V_1 : m_2 = V_2 : m_1. \tag{16}$$

Формула (15) — это «правило рычага для скоростей». Она показывает, что при движении двух материальных точек относительно барицентра векторы их скоростей в каждый момент параллельны и противоположно направлены. По величине скорости материальных точек обратно пропорциональны их массам, так что «более тяжелая» материальная точка движется (относительно барицентра) с меньшей линейной скоростью. Из (2) следует, что $m_1R_1 = m_2R_2$. Поэтому

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2},$$

то есть угловые скорости точек A_1 и A_2 в каждый момент времени равны между собой.

Интегралы энергии и площадей запишутся так:

$$\frac{1}{2}(m_1V_1^2 + m_2V_2^2) = f\frac{m_1m_2}{R_{12}} + h \tag{17}$$

и

$$m_1(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1) + m_2(\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{18}$$

Последнее уравнение перепишем в скалярной форме. Вектор $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1$ направлен перпендикулярно к плоскости CXY и равен удвоенной секториальной скорости точки A_1 относительно барицентра C:

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1 = 2\frac{dS_1}{dt}\boldsymbol{k},$$

а вектор $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2$ равен удвоенной секториальной скорости точки A_2 и тоже направлен перпендикулярно к плоскости CXY:

$$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2 = 2\frac{dS_2}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Но в таком случае и вектор $\boldsymbol{\sigma}$ направлен перпендикулярно к плоскости CXY. Пусть $\boldsymbol{\sigma}=\sigma\boldsymbol{k}$; тогда получим $\frac{1}{m}\left(m_1\frac{dS_1}{dt}+m_2\frac{dS_2}{dt}\right)=\frac{\sigma}{2m}$, где $m=m_1+m_2$, откуда

$$\frac{1}{m}(m_1S_1+m_2S_2)=\frac{\sigma}{2m}(t-t_0). \tag{19}$$

В последнем равенстве S_1 и S_2 — площади секторов, заметенных радиусами-векторами $\overrightarrow{CA}_1$ и $\overrightarrow{CA}_2$ за время, протекшее от момента t_0 до момента t.

Число $\frac{1}{m}(m_1S_1+m_2S_2)$ называется средним значением или взвешенным средним этих площадей.

Таким образом, согласно формуле (19), среднее значение площадей, заметенных радиусами-векторами $\overrightarrow{CA}_1$ и $\overrightarrow{CA}_2$ двух взаимно гравитирующих материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2), пропорционально времени, в течение которого эти площади были заметены. Это — новый вариант второго закона Кеплера.

Формула (14) позволяет найти орбиты, которые будут описаны материальными точками A_1 и A_2 относительно их барицентра C.

Действительно, из (14) следует, что

$$\boldsymbol{R}_2=-\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{R}_1,\quad \boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1=-\frac{m_1+m_2}{m_2}\boldsymbol{R}_1,$$

$$R_{12}=|\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1|=\frac{m_1+m_2}{m_2}R_1.$$

Поэтому [см. (13)]

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2}=-f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}, \tag{20}$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2}=-K_1\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3},$$

где

$$K_1=f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{21}$$

В главе II мы уже встречались с уравнениями вида

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\ (K > 0) \tag{22}$$

и убедились, что если движение точки определяется уравнением вида (22), то траектория точки — коническое сечение с фокусом в начале координат.

Итак, *материальная точка* (A_1, m_1) *будет двигаться относительно барицентра C так, как если бы она была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в барицентре C и имеющей гравитационный параметр*

$$K_1 = f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{23}$$

Аналогично будет двигаться и точка A_2, но в отношении ее следует полагать, что фиктивная звезда, которая помещена в барицентре C, имеет уже другой гравитационный параметр, а именно

$$K_2 = f\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{24}$$

Формула $\boldsymbol{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{R}_1$ показывает, что орбиты точек A_1 и A_2 относительно их барицентра гомотетичны (центрально подобны) и коэффициент подобия равен $-m_1/m_2$. Поэтому, зная орбиту одной из этих точек, легко найти орбиту другой.

Выясним связь между орбитой Г точки A_1 *относительно точки* A_2 и орбитой γ точки A_1 *относительно барицентра* C. Вместе с точкой A_1 обращается вокруг точки A_2 и точка C. Введем обозначения: A_2x — ось апсид орбиты Г, $\overrightarrow{A_2A_1} = \boldsymbol{r}$, $\sphericalangle\, xA_2A_1 = \theta$. Тогда уравнение орбиты Г можно будет записать в виде

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

Подсчитаем теперь R_1 и R_2. Мы имеем:

$$r = R_2 + R_1 = \frac{m_1}{m_2}R_1 + R_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2}R_1,$$

откуда

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r. \tag{25}$$

Поэтому

$$R_1 = \frac{p_1}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

где

$$p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p. \tag{26}$$

Аналогично можно показать, что

$$R_2 = \frac{p_2}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

где

$$p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p. \tag{27}$$

Таким образом,

$$p_1 : p_2 : p = m_2 : m_1 : (m_1 + m_2). \tag{28}$$

Эксцентриситеты же у всех трех орбит одинаковы. Таким образом, две материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) *описывают вокруг их барицентра C конические сечения той же формы, что и орбита точки A_1 относительно точки A_2.* Отношение же размеров этих орбит вполне характеризуется соотношением (28).

3. Лагранжевы движения. Мы видели выше, что благодаря взаимодействию двух материальных точек каждая из них движется относительно их барицентра так, как если бы она притягивалась некоторой массой, помещенной в барицентре.

Аналогично обстоит дело в некоторых случаях при наличии трех и более гравитирующих материальных точек.

Еще в мемуаре, опубликованном в 1772 году, известный французский математик Ж. Л. Лагранж интересовался таким вопросом: какими особенностями должно обладать движение трех взаимно тяготеющих материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) для того, чтобы расстояния между ними в течение всего движения оставались равными,

то есть чтобы в любой момент времени

$$R_{12} = R_{23} = R_{31}. \tag{29}$$

Оказывается, что *в этом случае точка* A_1 *будет двигаться относительно барицентра* C *точек* (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) *в точности так же, как она двигалась бы, если бы была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в барицентре* C *и имеющей массу*

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \tag{30}$$

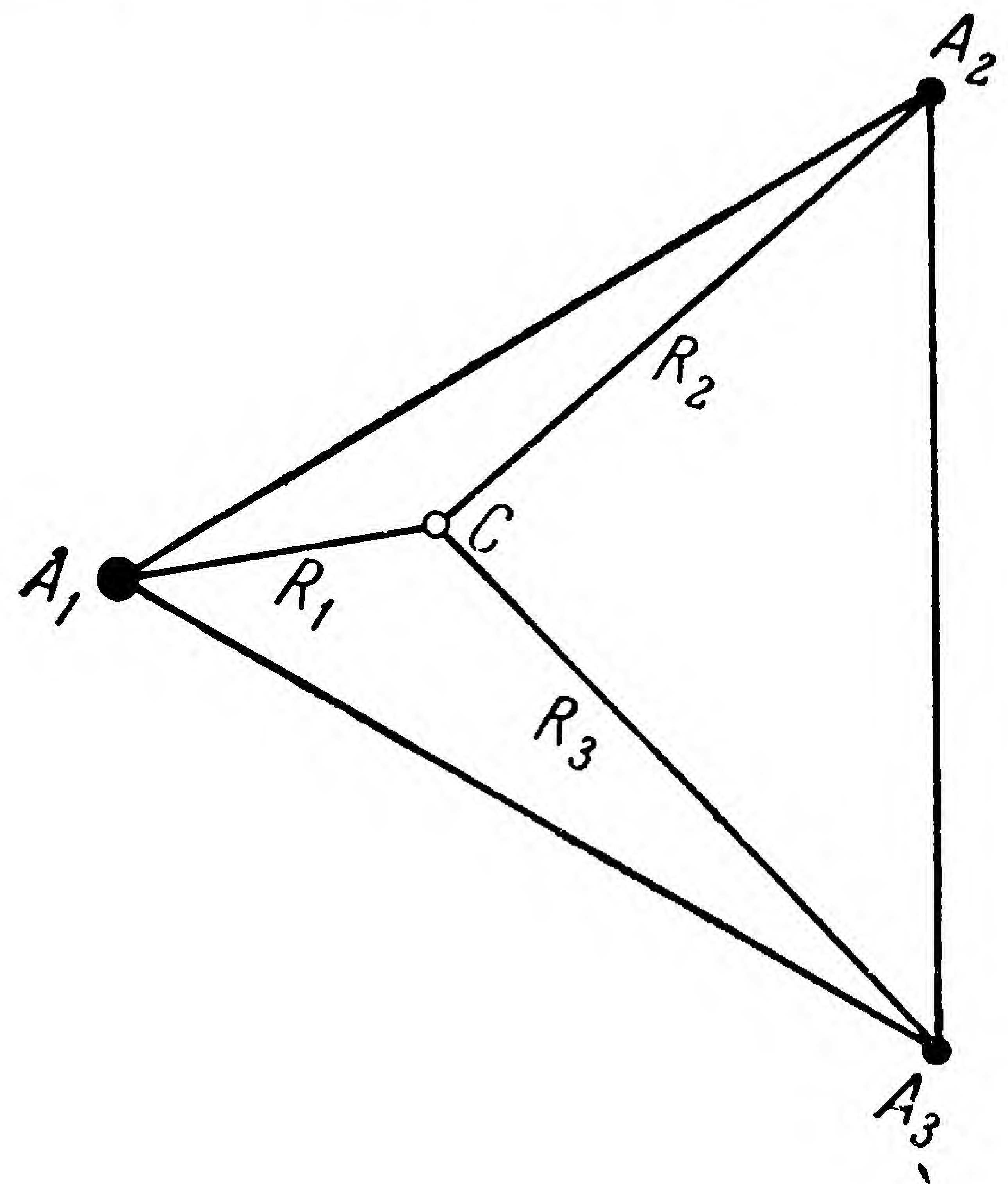


Рис. 5.4.

Докажем это. Будем придерживаться обозначений, принятых в начале этого параграфа. В нашем случае [см. (4)]

$$\boldsymbol{F}_1 = fm_1 \left[\frac{m_2}{R_{12}^3} (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1) + \frac{m_3}{R_{13}^3} (\boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1) \right].$$

Так как $R_{13} = R_{12}$ и $m_1\boldsymbol{R}_1 + m_2\boldsymbol{R}_2 + m_3\boldsymbol{R}_3 = 0$, то

$$\boldsymbol{F}_1 = -fm_1 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{R_{12}^3} \boldsymbol{R}_1.$$

Но так как C — барицентр точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) (рис. 5.4), то

$$(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{A_1C} = m_1\overrightarrow{A_1A_1} + m_2\overrightarrow{A_1A_2} + m_3\overrightarrow{A_1A_3}.$$

Возведем обе части последнего равенства скалярно в квадрат и учтем, что

$$\overrightarrow{A_1A_1} = 0, \quad A_1A_2 = A_1A_3 = R_{12}, \quad \overrightarrow{A_1C} = -\boldsymbol{R}_1.$$

Тогда получим:

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 R_1^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) R_{12}^2.$$

Следовательно,

$$R_{12}^3 = (m_1 + m_2 + m_3)^3 R_1^3/(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2},$$

так что

$$\boldsymbol{F}_1 = -f m_1 \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}. \qquad (31)$$

Так как по второму закону Ньютона $\boldsymbol{F}_1 = m_1\, d^2\boldsymbol{R}_1/dt^2$, то уравнение движения точки A_1 имеет вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_1}{dt^2} = -fM_1 \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3}, \qquad (32)$$

где M_1 определяется формулой (30). Но это и есть уравнение движения непритягивающего спутника относительно точки C, в которой помещена масса M_1. Справедливость высказанного выше предположения доказана. Аналогично обстоит дело и с точками A_2 и A_3. При $m_3 = 0$ формула (32) переходит в формулу (20).

Уже в XX столетии французский астроном Андуайе́ и немецкий математик Каратеодори показали, что движение трех материальных точек, при котором все время соблюдается условие (29), обязательно должно происходить в одной и той же неизменяемой плоскости.

Для того чтобы условие (29) выполнялось в течение всего времени движения, необходим специальный выбор «начальных» значений скоростей материальных точек A_1, A_2, A_3. Мы опустим здесь доказательство того, что такой выбор «начальных» скоростей возможен.

При соблюдении в течение всего времени движения условия (29) расстояния между материальными точками могут меняться, но они остаются попарно равными между собой. Можно показать, что в этом случае три точки описывают *подобные* конические сечения относительно барицентра.

Возможно ли такое движение трех материальных точек, при котором сохраняются неизменными *отношения* расстояний между этими точками? Можно показать, что в этом случае необходимо, чтобы три точки либо все время были на равных расстояниях друг от друга, либо лежали на одной прямой (в последнем случае положение трех точек не может быть произвольным).

§ 5. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ИЗ НИХ

1. Рассмотрим систему n взаимно гравитирующих материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), ..., (A_{n-1}, m_{n-1}). Начало координат выберем в точке A_0, оси координат выберем так, чтобы они сохраняли постоянное направление в пространстве.

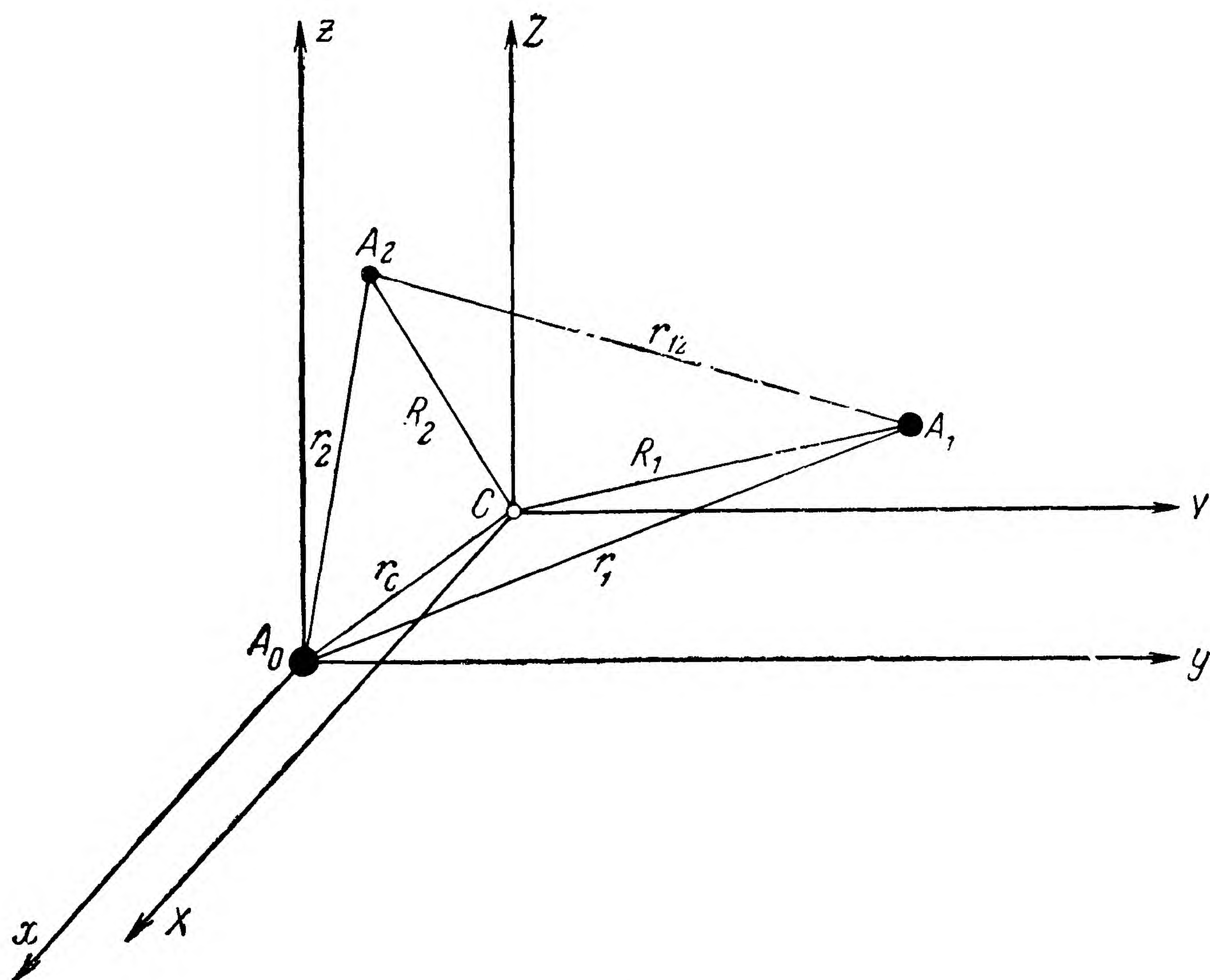


Рис. 5.5.

В этом параграфе мы выведем дифференциальные уравнения, определяющие движение материальных точек относительно указанной здесь системы отсчета.

Для простоты ограничимся сначала случаем трех точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), (A_2, m_2).

Наряду с системой отсчета A_0xyz (рис. 5.5) с осями, постоянно ориентированными в пространстве, рассмотрим еще систему отсчета $CXYZ$, имеющую своим началом барицентр C трех данных точек и оси, одинаково направленные

с осями системы A_0xyz. Пусть

$$\overrightarrow{CA_0} = \boldsymbol{R}_0,\ \overrightarrow{CA_1} = \boldsymbol{R}_1,\ \overrightarrow{CA_2} = \boldsymbol{R}_2,\ \overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{R}_{12} = \boldsymbol{r}_{12}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{R}_{01} = \overrightarrow{A_0A_1} = \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{R}_{02} = \overrightarrow{A_0A_2} = \boldsymbol{r}_2,\ \overrightarrow{A_0C} = \boldsymbol{r}_C, \quad (2)$$

$$m = m_0 + m_1 + m_2. \quad (3)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_C = -\boldsymbol{R}_0,\ \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0,\ \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{m}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2), \quad (5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ddot{\boldsymbol{R}}_2 - \ddot{\boldsymbol{R}}_0. \quad (6)$$

Из формул (5.4.6) и (5.4.4) ясно, что в данном случае

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_2 = f\left[\frac{m_0}{R_{02}^3}(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2) + \frac{m_1}{R_{12}^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)\right].$$

Используя равенства (1), (2), (4), получим:

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_2 = f\left[-\frac{m_0}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 + \frac{m_1}{r_{12}^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right]. \quad (7)$$

Аналогично легко показать, что

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_0 = f\left[\frac{m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2\right]. \quad (8)$$

Из (6) — (8) выводим дифференциальное уравнение движения точки A_2 относительно A_0:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 + fm_1\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right). \quad (9)$$

Совершенно такие же рассуждения позволяют получить дифференциальное уравнение движения точки A_1

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 + fm_2\left(\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right). \quad (10)$$

2. Выясним физический смысл отдельных членов уравнения (9). Условимся здесь называть материальную точку

(A_0, m_0) центральным телом, материальную точку (A_2, m_2) — спутником центрального тела (A_0, m_0), а материальную точку (A_1, m_1) — возмущающим телом.

Если бы возмущающего тела вовсе не было, то спутник под влиянием центрального тела получил бы ускорение

$$\boldsymbol{a} = -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2. \tag{11}$$

Из-за вмешательства возмущающего тела спутник получает дополнительное ускорение

$$\boldsymbol{\Phi} = fm_1\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right). \tag{12}$$

Это дополнительное ускорение $\boldsymbol{\Phi}$ представляет собой некоторую разность:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}. \tag{12'}$$

Уменьшаемое $\boldsymbol{b} \equiv fm_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/r_{12}^3$ можно записать так:

$$\boldsymbol{b} = -fm_1\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}. \tag{13}$$

Вектор $\boldsymbol{b}$ — это ускорение, которое получил бы спутник, если бы на него воздействовало только возмущающее тело, а сам он и центральное тело потеряли бы способность притягивать.

Вычитаемое в выражении (12)

$$\boldsymbol{c} \equiv fm_1\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} \tag{13'}$$

— это ускорение, которое сообщает возмущающее тело центральному телу.

Таким образом, *дополнительное ускорение* $\boldsymbol{\Phi}$, *которое получает спутник из-за вмешательства возмущающего тела, равно избытку ускорения, сообщаемого возмущающим телом спутнику, над ускорением, сообщаемым возмущающим телом центральному телу*. При этом имеется в виду, что 1) каждое из этих ускорений рассматривается при движении относительно возмущающего тела, 2) при вычислении этих

ускорений центральное тело и спутник рассматриваются как непритягивающие (а лишь притягиваемые) точки.

3. Система двух векторных дифференциальных уравнений (9) и (10) равносильна системе из шести скалярных дифференциальных уравнений второго порядка. Если в системе отсчета A_0xyz точки A_1 и A_2 имеют соответственно координаты x_1, y_1, z_1 и x, y, z, то есть

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_2 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

то

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ r_{12} &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Уравнения (9) и (10) можно заменить шестью скалярными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}x + fm_1\left(\frac{x_1 - x}{r_{12}^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}y + fm_1\left(\frac{y_1 - y}{r_{12}^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_2}{r_2^3}z + fm_1\left(\frac{z_1 - z}{r_{12}^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right); \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}x_1 + fm_2\left(\frac{x - x_1}{r_{12}^3} - \frac{x}{r_2^3}\right), \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}y_1 + fm_2\left(\frac{y - y_1}{r_{12}^3} - \frac{y}{r_2^3}\right), \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= -f\frac{m_0 + m_1}{r_1^3}z_1 + fm_2\left(\frac{z - z_1}{r_{12}^3} - \frac{z}{r_2^3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

В тех случаях, которые интересны для космонавтики, одно из трех тел (космический аппарат) имеет ничтожно малую массу по сравнению с двумя другими телами (например, m_2 пренебрежимо мало по сравнению с m_0 и m_1). Поэтому допустимо полагать $f(m_0 + m_2) \approx fm_0 \equiv K_0$, где K_0 — гравитационный параметр центрального тела (A_0, m_0). Кроме того, движение возмущающего тела A_1 относительно центрального тела можно считать известным —

космический аппарат (A_2, m_2) практически не влияет на движение возмущающего тела (A_1, m_1). Поэтому задача определения движения космического аппарата сводится к решению системы трех уравнений второго порядка (15).

4. Формулы (9) и (10) нетрудно обобщить на случай системы из любого числа материальных точек. Пусть рассматривается движение n взаимно гравитирующих материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), . . . , (A_{n-1}, m_{n-1}) в системе отсчета с началом A_0 и с осями, сохраняющими неизменную ориентацию в пространстве. Введем обозначения:

$$\overrightarrow{A_0A_\nu} = \boldsymbol{r}_\nu, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots, n-1,$$

$$r_{\nu s} = |\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_\nu|;$$

$$\boldsymbol{\Phi}_\nu = f \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\nu}}^{n-1} m_s \left(\frac{\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_\nu}{r_{\nu s}^3} - \frac{\boldsymbol{r}_s}{r_s^3}\right). \qquad (17)$$

Тогда движение рассматриваемых $n - 1$ материальных точек описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} = -f\frac{m_0 + m_\nu}{r_\nu^3}\boldsymbol{r}_\nu + \boldsymbol{\Phi}_\nu,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (18)$$

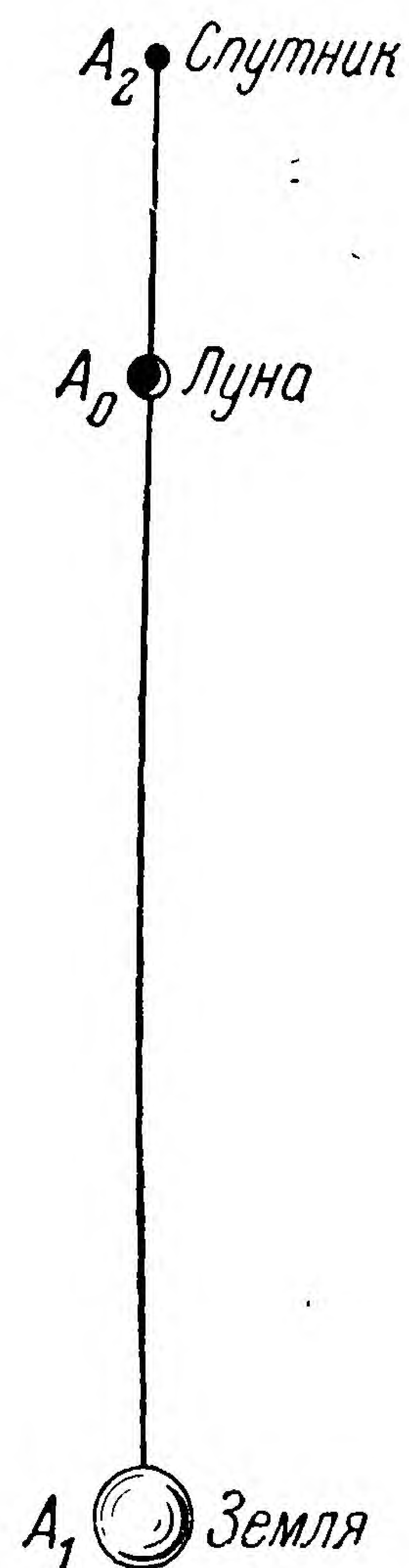


Рис. 5.6.

5. П р и м е р. Пусть в какой-то момент времени круговой искусственный спутник Луны находится на продолжении отрезка, соединяющего центр Земли с центром Луны (рис. 5.6). Каким образом повлияет притяжение Земли на движение спутника относительно Луны?

В качестве центрального тела в данном случае выбираем Луну; Земля будет возмущающим телом. Благодаря наличию Земли спутник получает дополнительное ускорение Ф. Подсчитаем его. Обозначим через A_1 и A_0 центры Земли и Луны, через A_2 спутник, через $\boldsymbol{k}$ орт вектора $\overrightarrow{A_1A_0}$, через m_0, m_1, m_2 массы Луны, Земли и спутника.

Пусть $A_0A_1 = R$, $A_0A_2 = \rho$. Тогда по формулам (13) и (13')

$$\boldsymbol{b} = -f\frac{m_1}{(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = -f\frac{m_1}{R^2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = fm_1\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+\rho)^2}\right]\boldsymbol{k} = fm_1\frac{(2R+\rho)\rho}{R^2(R+\rho)^2}\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, с точки зрения лунного наблюдателя, видящего спутник A_2 в зените, благодаря притяжению Земли спутник получает дополнительное ускорение *от* Луны, Земля как бы отталкивает спутник A_2 от Луны!

§ 6. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ И ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

1. В предшествующем параграфе мы интересовались движением системы трех материальных точек относительно одной из них.

Здесь мы будем рассматривать движение относительно *произвольной движущейся в пространстве* точки N. Точнее: пусть в пространстве выбрана некоторая прямоугольная система декартовых координат $Nxyz$, вообще говоря, неинерциальная, но имеющая оси, постоянно ориентированные в пространстве (рис. 5.7). Иначе говоря, система $Nxyz$ движется относительно какой-то инерциальной системы только поступательно, то есть так, что каждая из осей Nx, Ny, Nz остается «параллельной самой себе».

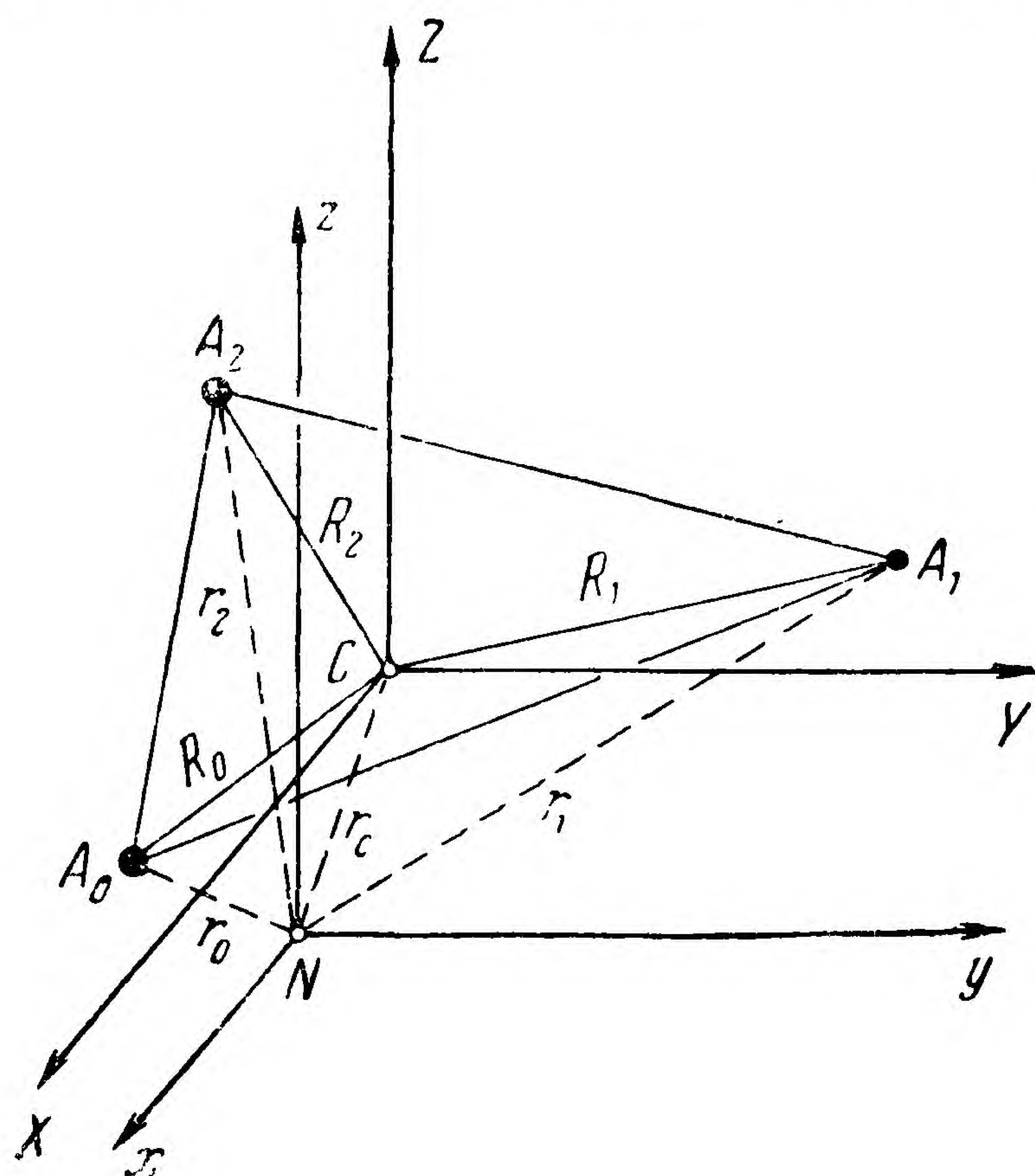


Рис. 5.7.

Приведем наглядный пример такой системы отсчета. Пусть наблюдения за движением Солнца, Земли и Луны ведутся в космической обсерватории, перемещающейся в околосолнечном

пространстве под воздействием какого-то двигателя (вид двигателя, режим его работы нас здесь не интересуют). Каково будет движение этих трех тел с точки зрения наблюдателя такой обсерватории? В данном случае началом системы N служит наблюдательный пункт космической обсерватории, а оси координат должны иметь постоянную ориентацию относительно «неподвижных» звезд.

В этой системе отсчета между координатами и скоростями точек A_0, A_1, A_2 существуют некоторые зависимости, которые мы сейчас получим.

Пусть C — барицентр материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), (A_2, m_2). Рассмотрим систему отсчета $CXYZ$ с началом в точке C и осями, параллельными соответствующим осям системы $Nxyz$.

Введем обозначения: $\overrightarrow{NA_k} = \boldsymbol{r}_k$, $\overrightarrow{CA_k} = \boldsymbol{R}_k$,

$$\overrightarrow{NC} = \boldsymbol{r}_C,\ \boldsymbol{v}_k = \dot{\boldsymbol{r}}_k,\ \boldsymbol{V}_k = \dot{\boldsymbol{R}}_k,\ \boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C,\ \boldsymbol{V}_C = \dot{\boldsymbol{R}}_C \equiv 0,$$
$$k = 0, 1, 2;$$

$$m = m_0 + m_1 + m_2.$$

Мы имеем:

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_C,\ \boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_C,\ k = 0, 1, 2. \quad (1)$$

Для системы трех взаимно гравитирующих материальных точек A_0, A_1, A_2 имеют место зависимости [см. § 4, формулы (9) — (12)]

$$m_0\boldsymbol{R}_0 + m_1\boldsymbol{R}_1 + m_2\boldsymbol{R}_2 = 0, \quad (2)$$
$$m_0\boldsymbol{V}_0 + m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = 0, \quad (3)$$
$$\frac{1}{2}(m_0V_0^2 + m_1V_1^2 + m_2V_2^2) = U + h, \quad (4)$$
$$m_0(\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{V}_0) + m_1(\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{V}_1) + m_2(\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{V}_2) = \boldsymbol{\sigma}. \quad (5)$$

Переходя к новым переменным $\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{v}_k$, $k = 0, 1, 2$, из (2) получим

$$m_0\boldsymbol{r}_0 + m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 - m\boldsymbol{r}_C = 0. \quad (6)$$

Из (3) следует

$$m_0\boldsymbol{v}_0 + m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_C = 0. \quad (7)$$

Из (4) найдем

$$\frac{1}{2}(m_0V_0^2+m_1V_1^2+m_2V_2^2)=\frac{1}{2}[m_0(\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_C)^2+$$
$$+m_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_C)^2+m_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_C)^2]=\frac{1}{2}[(m_0\boldsymbol{v}_0^2+m_1\boldsymbol{v}_1^2+$$
$$+m_2\boldsymbol{v}_2^2)-2(m_0\boldsymbol{v}_0+m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_C+(m_0+m_1+m_2)\boldsymbol{v}_C^2].$$

Принимая во внимание формулы (7) и (4), получим:

$$\frac{1}{2}(m_0v_0^2+m_1v_1^2+m_2v_2^2)-\frac{1}{2}mv_C^2=U+h, \tag{8}$$

где

$$U=f\left(\frac{m_0m_1}{r_{01}}+\frac{m_0m_2}{r_{02}}+\frac{m_1m_2}{r_{12}}\right). \tag{9}$$

Это и есть искомый *интеграл энергии* в относительном движении.

Аналогичными рассуждениями выведем из (5) векторный *интеграл площадей* в относительном движении.

$$\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{R}_\nu\times\boldsymbol{V}_\nu)=\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu-\boldsymbol{r}_C)\times(\boldsymbol{v}_\nu-\boldsymbol{v}_C)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-\left(\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu\right)\times\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{r}_C\times\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu\boldsymbol{v}_\nu+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_C)=\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-(m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C)-$$
$$-(\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C)+\left(\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu\boldsymbol{r}_\nu\right)\times\boldsymbol{v}_C.$$

Принимая во внимание (6), получим:

$$\sum_{\nu=0}^{2}m_\nu(\boldsymbol{r}_\nu\times\boldsymbol{v}_\nu)-m(\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{\sigma}. \tag{10}$$

Отметим важный частный случай, когда движение рассматривается *относительно одной из трех данных материальных точек*, например A_0. В таком случае интегралы

(8) и (10) принимают вид

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{11}$$

$$m_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) + m_2(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2) - m(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{12}$$

В том частном случае, когда движение рассматривается относительно барицентра трех материальных точек, формулы (6) — (10), естественно, превращаются в ранее полученные формулы из § 4.

2. Рассматривая движение системы из n материальных точек (A_0, m_0), (A_1, m_1), ..., (A_{n-1}, m_{n-1}) относительно точки N, можно с помощью таких же рассуждений, как в случае трех точек, получить следующие зависимости между скоростями $\boldsymbol{v}_k$ и радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_k$ $(\boldsymbol{r}_k \equiv \overrightarrow{NA_k})$ рассматриваемых точек:

а) интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{13}$$

где

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1}, \tag{14}$$

$\boldsymbol{v}_C$ — скорость барицентра материальных точек (A_0, m_0), ..., (A_{n-1}, m_{n-1}),

$$U = f \sum_{\substack{\nu, s=0 \\ \nu<s}}^{n-1} \frac{m_\nu m_s}{r_{\nu s}}, \quad \boldsymbol{r}_{\nu s} = \overrightarrow{A_\nu A_s}; \tag{15}$$

б) интеграл площадей

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu) - m(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{16}$$

В частности, если в качестве точки N выбирается точка A_0, то зависимости (13) и (16) принимают более простой вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu v_\nu^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = U + h, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu) - m(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{\sigma}. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) представляют собой интеграл энергии и интеграл площадей при движении системы n гравитирующих точек относительно одной из них (A_0).

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. В предыдущих параграфах этой главы мы получили дифференциальные уравнения, определяющие движение n взаимно гравитирующих материальных точек в различных системах координат. Общее решение этих уравнений при $n \geqslant 3$ в замкнутом виде до сих пор неизвестно, и обычно приходится их решать приближенными методами или исследовать свойства движения качественными методами.

Дифференциальные уравнения и известные первые интегралы (интеграл площадей, интеграл энергии) позволяют получить ценную дополнительную информацию о возможных движениях нескольких гравитирующих тел.

Отметим здесь в качестве примера одну интересную проблему, связанную с задачей многих тел, — проблему «финальных типов движения». В случае $n = 3$ речь идет о возможных взаимных расположениях трех гравитирующих точек при неограниченном возрастании времени t.

Вопрос о финальных типах движения исключительно важен для космогонии (теории происхождения и развития солнечной системы и других звездных систем). Изучение финальных движений интересно и для космонавтики, ибо может дать некоторые ориентировочные представления о возможной эволюции траектории космического аппарата при длительном — в течение нескольких лет и более — воздействии на него двух или нескольких небесных тел.

Наиболее содержательные исследования о финальных движениях были выполнены в течение последних 35 лет и связаны с именем французского астронома Ж. Шази́ и ряда советских математиков и астрономов (О. Ю. Шмидт, Г. Ф. Хильми и другие).

Различают следующие случаи движения трех тел при $t \to \infty$:

а) *ограниченное* (или *эллиптическое*) движение: расстояния между тремя телами остаются ограниченными, не превосходящими некоторой фиксированной величины;

б) *гиперболическое*: попарные расстояния между телами с течением времени неограниченно возрастают;

в) *гиперболо-эллиптическое*: расстояние между двумя телами остается ограниченным сверху некоторой константой R, а расстояние третьего тела от этих двух неограниченно растет;

г) *осциллирующее* движение: расстояние одного из тел от одного из двух других (или от обоих тел) с течением времени принимает сколь угодно большие значения, но не стремится к бесконечности.

Аналогично можно классифицировать движение трех тел в прошлом, то есть при $t \to -\infty$. Если рассматривать движение трех тел во времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, то мыслимы, в частности, такие возможности:

1) При $t \to -\infty$ движение гиперболическое, а при $t \to +\infty$ движение гиперболо-эллиптическое.

2) Движение при $t \to -\infty$ гиперболо-эллиптическое, а при $t \to +\infty$ — эллиптическое.

В каждом из этих двух случаев говорят, что в системе имеет место *захват*.

3) Движение системы трех тел при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ является гиперболо-эллиптическим, но на ограниченных расстояних друг от друга остаются разные пары тел. В этом случае говорят, что в системе имеет место *обмен*.

В интересных исследованиях французского астронома Ж. Шази, опубликованных в 1929—1932 годах, содержалось доказательство утверждения, что захват и обмен в задаче трех тел невозможны. Впрочем, такого же мнения придерживались многие астрономы XIX—XX веков. Однако впоследствии было обнаружено, что доказательство Шази ошибочно. В 1947—1948 годах советские математики О. Ю. Шмидт и Г. Ф. Хильми, а затем К. А. Ситников, Г. А. Мерман и другие на конкретных примерах показали возможность захвата. Несколько позднее была установлена возможность обмена в задаче трех тел (В. М. Алексеев и др.). Оказалось, что как захват, так и обмен связаны со сближением хотя бы двух из трех тел. Особенно любопытной представляется возможность осцилляции в задаче трех тел, обнаруженная К. А. Ситниковым в 1960 году *).

*) См. по этому поводу еще главу VII, § 6.

2. В текущем столетии различными учеными предпринимались энергичные попытки получения общих решений задачи трех и многих тел с помощью бесконечных рядов того или иного вида. Вначале пытались представить координаты (x_ν, y_ν, z_ν) каждой из n взаимно гравитирующих точек A_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, в виде степенных рядов относительно времени t. Однако очень скоро было подмечено, что такие ряды будут, вообще говоря, расходящимися. Тогда стали искать разложения этих координат в степенные ряды по некоторому вспомогательному переменному. В 1912 году финский математик К. Зундман, привлекая аппарат теории функций комплексного переменного, построил степенные ряды, дающие решения задачи трех тел. Эти ряды имеют вид

$$x_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(\nu)} u^k, \quad y_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(\nu)} u^k, \quad z_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\nu)} u^k,$$
$$\nu = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Время t также выражается через u с помощью степенного ряда:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k. \tag{2}$$

Здесь u — специально подобранное вспомогательное переменное («псевдовремя»), связанное с временем t зависимостью вида

$$C\,dt = \frac{du}{U}, \tag{3}$$

где C — константа, а U — силовая функция системы, определяемая формулой (5.4.10′).

Ряды Зундмана пока не нашли практического применения, ибо до сих пор почти не изучен вопрос о быстроте сходимости этих рядов. Известно, что в некоторых случаях ряды Зундмана сходятся крайне медленно. Так, например, французский астроном Белорицкий в начале тридцатых годов показал, что при некотором специальном выборе исходных данных ряды Зундмана дадут правильный результат с относительной погрешностью 10%, лишь если число членов в рядах Зундмана будет больше, чем $10^{8\,000\,000}$. Суммирование

такого громадного числа слагаемых не под силу даже самой быстродействующей вычислительной машине.

В то же время в статье югославского астронома Р. Верника в 1955 году приведен пример противоположного характера, когда при другом специальном выборе исходных данных можно вычислить суммы рядов Зундмана с тремя верными десятичными знаками, если ограничиться лишь первыми тремя членами каждого из этих рядов.

3. Уже в последние годы, после запуска первых советских спутников, австрийский математик В. Гребнер и его ученики предприняли новую попытку поиска общего решения задачи многих тел, имея в виду в первую очередь запросы космонавтики. Гребнер [5.4] ищет представление решений задачи n тел в виде рядов специального типа, встречающихся впервые в работах норвежского математика Софуса Ли.

Ряд Ли — Гребнера может быть определен следующим образом. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — какие-то независимые переменные (вообще говоря, комплексные); $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_m(z)$ и $f(z)$ — аналитические функции от $z(z_1, z_2, \ldots, z_m)$. Рассматривается оператор

$$D = \theta_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \theta_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + \theta_m(z)\frac{\partial}{\partial z_m}. \tag{4}$$

Операторы $Df, D^2f, \ldots, D^\nu f$ определяются формулами

$$Df = \sum_{k=1}^{m} \theta_k(z)\frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad D^2f = D(Df), \ldots, D^\nu f = D(D^{\nu-1}f).$$

Ряд Ли — Гребнера для функции $f(z)$ — это следующий ряд:

$$f(z) + \frac{t}{1!}Df + \frac{t^2}{2!}D^2f + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu f + \ldots \tag{5}$$

Символически возможно этот ряд записать и так *):

$$e^{tD}f(z), \tag{6}$$

*) Ряд Тейлора представляет собой частный случай ряда Ли — Гребнера, когда $D = d/dz$. В этом частном случае формула (6) дает разложение функции $f(z+t)$ в ряд Тейлора по степеням t:

$$f(z+t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(z).$$

где e^{tD} — оператор, определяемый формулой

$$e^{tD} = 1 + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!}D^\nu + \ldots \qquad (7)$$

Можно показать, что

$$f(e^{tD}z) = e^{tD}f(z). \qquad (8)$$

В. Гребнер показал, что координаты и компоненты скорости каждой из n взаимно гравитирующих точек возможно представить в виде рядов (5). Для решения задачи об n телах при $n \geqslant 3$ оператор D имеет, к сожалению, весьма громоздкий вид, что сильно усложняет практическое применение рядов Ли — Гребнера.

ГЛАВА VI

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РАСЧЕТУ ТРАЕКТОРИИ МАЛОГО ТЕЛА

§ 1. СФЕРА ПРИТЯЖЕНИЯ И СФЕРА ДЕЙСТВИЯ

1. Сфера притяжения. Пусть рассматривается движение некоторой материальной точки $(P,\ m)$ (космического корабля, астероида, кометы и т. п.) под воздействием двух небесных тел с массами m_1 и m_2. Эти тела будем называть *притягивающими центрами*, или условно, для краткости, «звездами». Мы будем их рассматривать как материальные точки; для определенности будем полагать, что $m_1 < m_2$ и будем говорить, что «звезда A_1 *меньше* звезды A_2».

Особенно нас будет интересовать случай, когда масса m_1 значительно меньше массы m_2 $(m_1 \ll m_2)$. Точный смысл этого ограничения заключается в том, что при требуемой в данной конкретной задаче точности в расчетах допустимо пренебречь квадратом величины $\mu = m_1 / m_2$.

Массу материальной точки $(P,\ m)$ будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массами звезд $(m \ll m_1)$. Материальную точку $(P,\ m)$ условимся здесь называть *спутником системы двух притягивающих центров* $(A_1,\ m_1)$ и $(A_2,\ m_2)$.

Силы F_1 и F_2, с которыми точка $(P,\ m)$ притягивается к точкам A_1 и A_2, определяются в соответствии с законом всемирного тяготения по формулам

$$F_1 = f\frac{mm_1}{|\overrightarrow{A_1P}|^2}, \quad F_2 = f\frac{mm_2}{|\overrightarrow{A_2P}|^2}.$$

В пространстве существуют такие точки, в которых меньшая звезда A_1 притягивает спутник сильнее, чем большая звезда, то есть в которых $F_1 > F_2$.

Множество *всех* таких точек пространства называется областью притяжения меньшей звезды относительно большей *).

Что же собой представляет геометрически это множество точек? Если спутник P находится в непосредственной близости к звезде A_1 (то есть если A_1P достаточно мало), то он будет притягиваться к меньшей звезде (A_1) сильнее, чем к большей (A_2).

Будем теперь мысленно перемещать спутник P по прямой A_1A_2 в направлении от A_1 к A_2 (рис. 6.1). Спутник при этом пройдет через такое положение C, в котором он будет притягиваться с *одинаковой* силой к точкам A_1 и A_2.

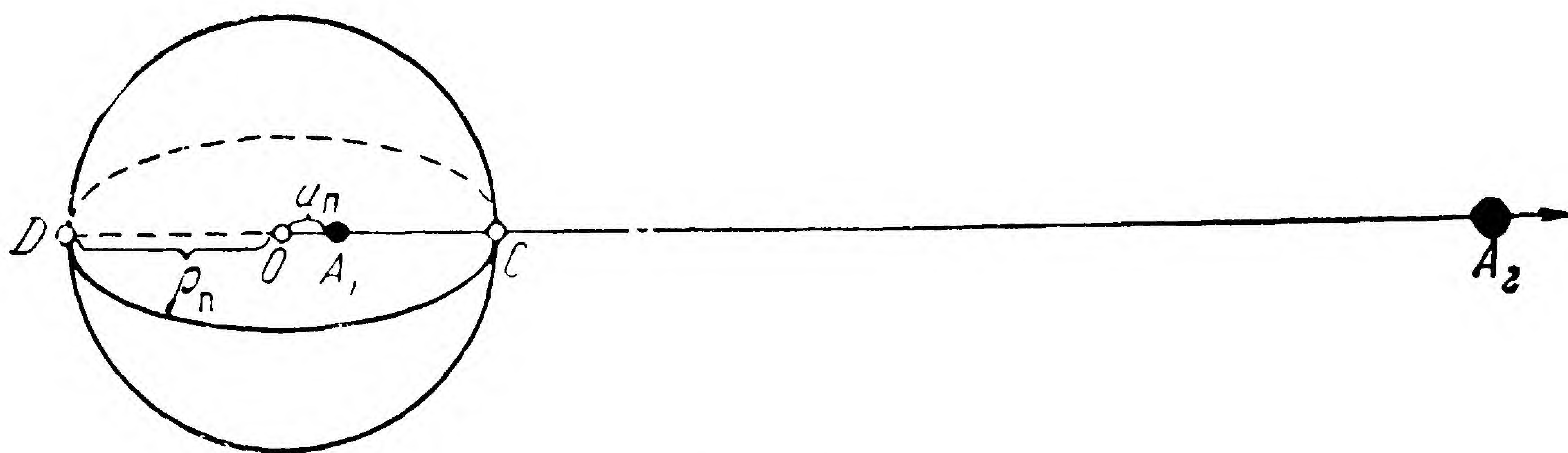


Рис. 6.1.

Перемещаясь по прямой A_1A_2 в противоположном направлении, то есть удаляясь неограниченно вдоль луча A_2A_1, спутник опять пройдет через некоторую точку D, в которой он будет с одинаковой силой притягиваться к A_1 и A_2. Точки C и D можно назвать коллинеарными точками равных притяжений.

В точке C

$$f\frac{mm_1}{|\overrightarrow{A_1C}|^2} = f\frac{mm_2}{|\overrightarrow{A_2C}|^2};$$

отсюда

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\mu}. \qquad (1)$$

*) Обычно вместо термина «область притяжения» употребляют менее точный термин «сфера притяжения» (менее точный потому, что в геометрии под сферой понимают поверхность, а не пространственную область).

Аналогично

$$\frac{A_1D}{A_2D} = \sqrt{\mu}. \qquad (2)$$

Какую же фигуру образуют *все* точки пространства, в которых спутник с одинаковой силой притягивается к звездам A_1 и A_2?

Покажем, что геометрическим местом точек пространства, в каждой из которых притяжение спутника к меньшей звезде *равно* притяжению к большей звезде, является *сфера*; концами одного из ее диаметров служат две коллинеарные точки равного притяжения C и D.

Действительно, речь идет о геометрическом месте таких точек P, в которых $f\frac{m_1m}{|\overrightarrow{A_1P}|^2} = f\frac{m_2m}{|\overrightarrow{A_2P}|^2}$. Но в таких точках P

$$\frac{A_1P}{A_2P} = \sqrt{\mu} = \text{const} < 1, \qquad (3)$$

то есть отношение расстояний точки P от A_1 и A_2 постоянно.

В курсе элементарной геометрии *) устанавливается, что таким геометрическим местом точек является сфера с диаметром CD, она называется «сферой Аполлония». Внутри этой сферы

$$\frac{A_1P}{A_2P} < \sqrt{\mu},$$

откуда

$$f\frac{m_1m}{|\overrightarrow{A_1P}|^2} > f\frac{m_2m}{|\overrightarrow{A_2P}|^2},$$

то есть $F_1 > F_2$. Вне этой сферы $F_1 < F_2$.

Итак, *«областью притяжения» меньшей звезды относительно большей является шар (внутренность сферы); концами одного из его диаметров служат точки C и D, делящие отрезок A_1A_2 в отношении $\sqrt{\mu}$ внутренним и внешним образом.*

---

*) Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, стр. 95, ГТТИ, 1949.

Найдем радиус сферы притяжения и положение ее центра. Так как точка D находится *вне* отрезка A_1A_2, а точка C — *внутри* него, то $DA_2 > CA_2$. Поэтому из (1) и (2) вытекает, что $DA_1 > A_1C$. Следовательно, центр O сферы притяжения (середина отрезка DC) всегда лежит *вне* отрезка A_1A_2. Пусть $A_1A_2 = a$. Обозначим через $\rho_п$ радиус сферы притяжения и через $u_п$ — расстояние центра этой сферы до точки A_1 (рис. 6.1). В этих обозначениях равенства (1), (2) запишутся так:

$$\frac{\rho_п - u_п}{a - (\rho_п - u_п)} = \sqrt{\mu}, \qquad \frac{\rho_п + u_п}{a + (\rho_п + u_п)} = \sqrt{\mu}.$$

Отсюда

$$\rho_п - u_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}, \qquad \rho_п + u_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\rho_п = \frac{a\sqrt{\mu}}{1-\mu}, \tag{4}$$

$$u_п = \frac{a\mu}{1-\mu}. \tag{5}$$

П р и м е р. Определим радиус сферы притяжения Луны относительно Земли и положение центра этой сферы.

В данном случае $\mu \approx \frac{1}{81}$, $a \approx 384\,000$ *км*. По формулам (4) и (5) находим:

$$\rho_п = a\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{81}} \approx \frac{9}{80}a \approx 43\,000 \text{ км},$$

$$u_п = a\frac{\frac{1}{81}}{1-\frac{1}{81}} \approx \frac{1}{80}a \approx 4500 \text{ км}.$$

2. С ф е р а д е й с т в и я. Движение малого спутника P (рис. 6.2) под действием притяжения двух «звезд»

(A_1, m_1) и (A_2, m_2) можно изучать в различных системах отсчета. В частности, можно принять в качестве начала отсчета любую из точек A_1 или A_2, то есть рассматривать движение спутника P относительно любой из двух звезд A_1 или A_2, а другую звезду считать возмущающей.

Так, например, движение советской искусственной планеты, запущенной 2 января 1959 года, можно рассматривать в системе отсчета с началом в центре Земли (геоцентрическое движение). И то же движение можно рассматривать в системе отсчета с началом в центре Солнца (гелиоцентрическое движение).

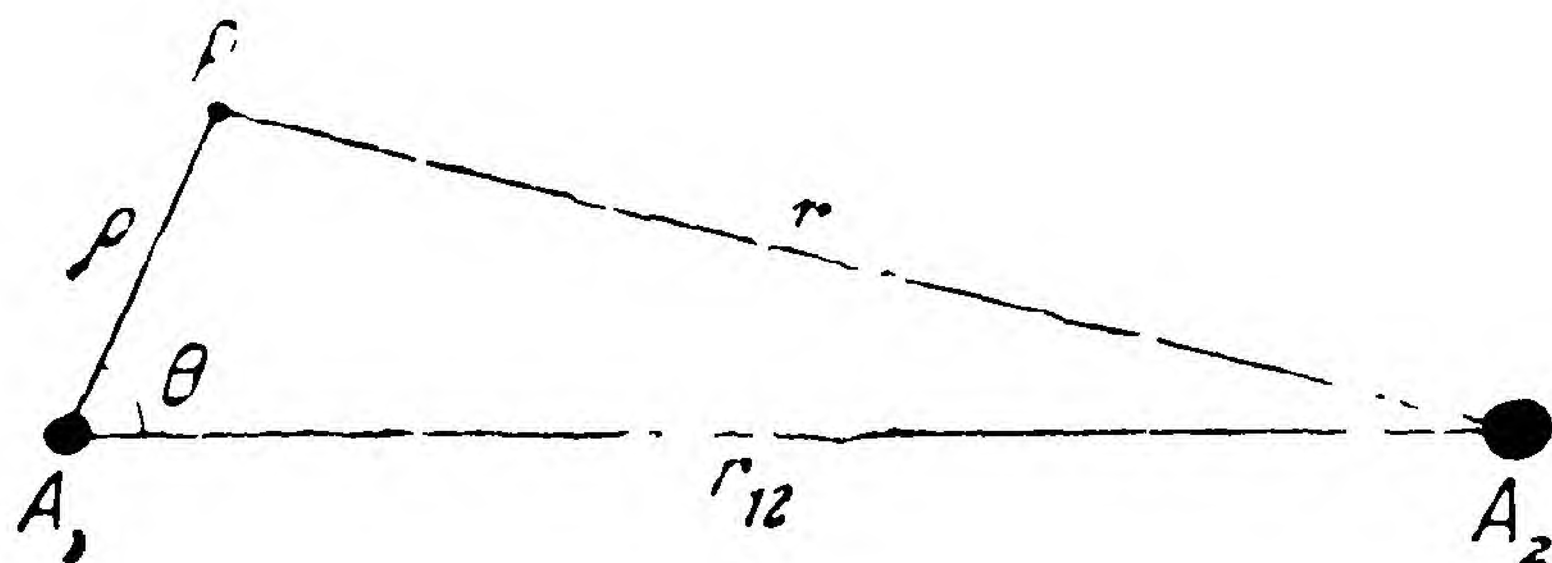


Рис. 6.2.

Рассмотрим сначала движение спутника P в системе отсчета с началом в *меньшей* звезде A_1. Тогда уравнение движения спутника запишется в виде *)

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{\Phi}_1, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{a}_1 = -f\frac{m_1 + m}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = fm_2\left(\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right), \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{A_1P}, \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{A_2P},$$

$$\boldsymbol{r}_{12} = \overrightarrow{A_1A_2}, \ |\boldsymbol{r}_{12}| = a. \tag{8}$$

Ускорение спутника распадается на две составляющие:

а) *«основное»* ускорение $\boldsymbol{a}_1$, то есть то ускорение, которое имел бы спутник, если бы прекратилось влияние «возмущающей звезды»;

б) *возмущающее* ускорение $\boldsymbol{\Phi}_1$, то есть то дополнительное ускорение, которое получает спутник P вследствие вмешательства «возмущающей звезды» A_2.

Величина Φ_1/a_1 показывает, какую часть «основного» ускорения $\boldsymbol{a}_1$ составляет возмущающее ускорение. Чем

*) См. § 5 главы V.

меньше это отношение, тем меньше отличается орбита спутника от кеплеровой орбиты.

Обратимся теперь к движению спутника относительно *большей* звезды A_2.

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{\Phi}_2, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{a}_2 = -f\frac{m_2 + m}{r^3}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\Phi}_2 = fm_1\left(\frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}}{r_{12}^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right). \tag{10}$$

Доля возмущающего ускорения Φ_2 от «основного» a_2 составляет Φ_2/a_2.

Область пространства, в которой выполняется неравенство

$$\frac{\Phi_1}{a_1} < \frac{\Phi_2}{a_2}, \tag{11}$$

называется *областью действия*, или *сферой действия*, меньшей «звезды» относительно большей.

Внутри сферы действия меньшей звезды (относительно бóльшей) обычно выгоднее рассматривать меньшую звезду в качестве центральной, а бóльшую — в качестве возмущающей.

Так, например, в случае движения искусственной планеты, запущенной с Земли, в начале ее пути, когда ракета находится внутри сферы действия Земли, целесообразно рассматривать ее движение в системе отсчета, связанной с Землей (геоцентрическое движение), а Солнце рассматривать как возмущающую звезду. Вне сферы действия Земли выгоднее, наоборот, рассматривать ее движение в системе отсчета, связанной с Солнцем (гелиоцентрическое движение), а Землю рассматривать как возмущающее тело. Другой пример: при прохождении кометы внутри сферы действия Юпитера часто выгоднее не Солнце, а Юпитер принять за центральное тело, а Солнце считать возмущающей звездой (точнее говоря, внутри сферы действия Юпитера рассматривать движение кометы в системе отсчета с началом в центре тяжести Юпитера). После прохождения кометы

через сферу действия Юпитера целесообразно снова перейти к гелиоцентрической системе отсчета.

Выясним теперь, какова геометрическая форма области действия меньшей звезды относительно большей. Для этого сначала найдем уравнение граничной поверхности S области действия, то есть поверхности S, на которой

$$\frac{\Phi_1}{a_1} = \frac{\Phi_2}{a_2}. \tag{12}$$

Из формул (7), (8) и (10) следует, что

$$a_1 = f\frac{m_1 + m}{\rho^2}, \quad \Phi_1 = fm_2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|,$$

$$a_2 = f\frac{m_2 + m}{r^2}, \quad \Phi_2 = fm_1\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right|.$$

В силу формулы (12) в точках, лежащих на поверхности S, имеет место равенство

$$(m_1 + m)\,m_1 r^2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\right| = (m_2 + m)\,m_2\rho^2\left|\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{a^3} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|. \tag{13}$$

Возводя обе части равенства (13) в квадрат, мы после упрощений получим

$$(m_1 + m)^2 m_1^2 r^4\left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{\rho^4} - 2\cos\theta\,\frac{1}{a^2\rho^2}\right] =$$
$$= (m_2 + m)^2 m_2^2\rho^4\left[\frac{1}{a^4} + \frac{1}{r^4} - 2\,\frac{a^2 - a\rho\cos\theta}{a^3 r^3}\right]. \tag{14}$$

Здесь

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta, \quad \theta = \angle A_2A_1P.$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение границы S сферы действия в сферических координатах ρ, θ.

При помощи уравнения (14) можно установить, что в случае, когда $m_1 \ll m_2$, величина $\frac{\rho}{a}$ является малой. Произведем в этом уравнении приведение к общему знаменателю

и разложение по степеням $\frac{\rho}{a}$. Сохраняя после этого в разложении самую низкую степень величины $\frac{\rho}{a}$, получим уравнение:

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^{10}(1+3\cos^2\theta)=\mu^4, \tag{15}$$

где

$$\mu=\frac{m_1}{m_2}.$$

Отсюда

$$\rho=a\mu^{2/5}\frac{1}{\sqrt[10]{1+3\cos^2\theta}}. \tag{16}$$

Это — уравнение поверхности вращения (рис. 6.3), представляющей собой «слегка вытянутую» сферу. Она может

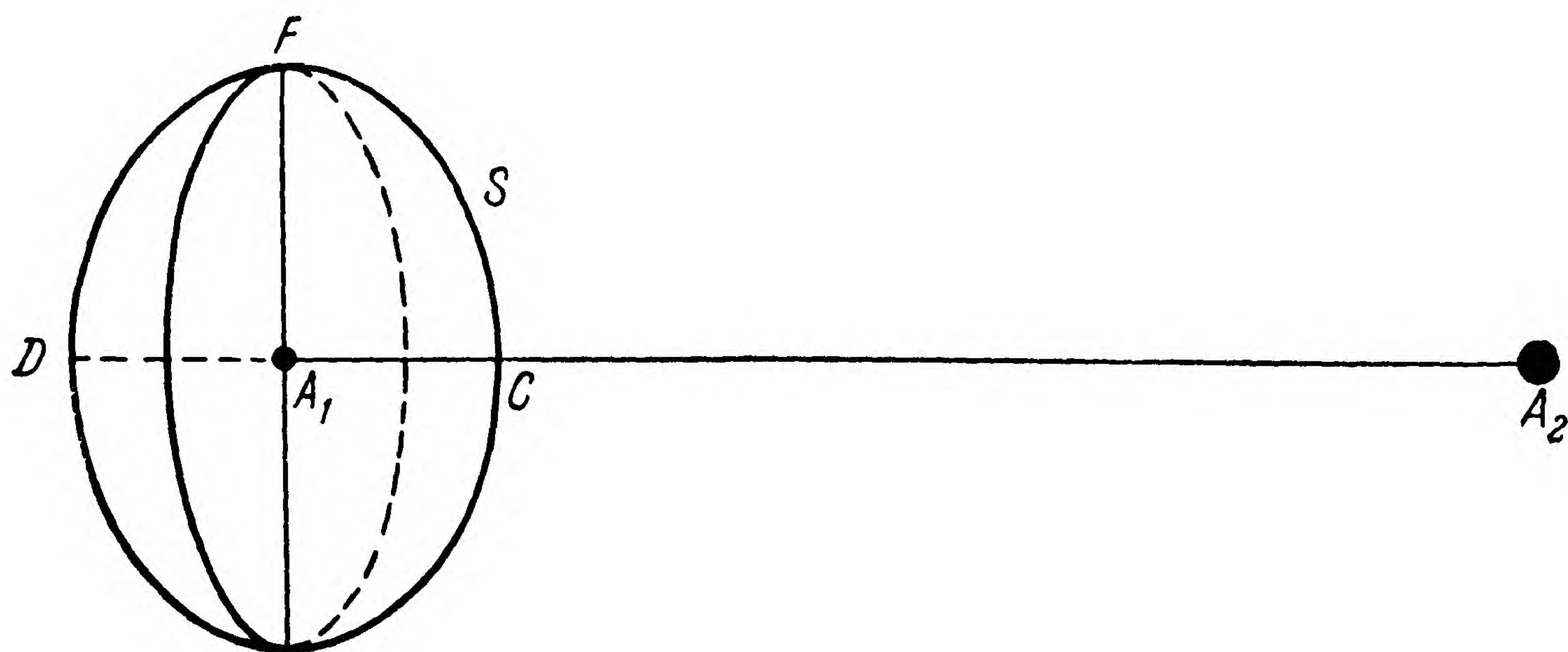


Рис. 6.3.

быть получена вращением вокруг оси A_1A_2 плоской *кривой*, имеющей то же уравнение.

На рис. 6.3

$$A_1F:A_1D=\sqrt[5]{2}\approx 1{,}15,\ \text{то есть}\ \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\approx 1{,}15. \tag{17}$$

Итак, граница S области действия меньшей звезды относительно большей звезды при малых значениях

отношения m_1 / m_2 мало отличается от сферы радиуса

$$\rho_д = a\mu^{2/5}, \qquad (18)$$

описанной вокруг меньшей звезды.

Внутри поверхности S будет выполняться неравенство

$$\frac{\Phi_1}{a_1} < \frac{\Phi_2}{a_2},$$

вне ее — неравенство

$$\frac{\Phi_2}{a_2} < \frac{\Phi_1}{a_1}.$$

Число $\rho_д$, определяемое формулой (18), называют обычно *радиусом действия* (или *радиусом сферы действия*) меньшей звезды относительно большей.

Из планет солнечной системы наибольший радиус действия относительно Солнца имеет Нептун (около 90 млн. *км*), наименьший — Меркурий (около 110 тыс. *км*).

Задачи

1. Вычислите радиус действия Земли относительно Солнца.
2. Вычислите радиус сферы притяжения и сферы действия Марса относительно Солнца.
3. Вычислите радиус действия Луны относительно Земли.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА

Решение задачи о движении материальной точки (P, m) (космического корабля, астероида и т. п.) под влиянием притяжения других тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ приводит к сложным дифференциальным уравнениям. Даже приближенное решение этих уравнений с помощью известных методов математического анализа весьма громоздко.

Особенно интересна для космонавтики такая ситуация, когда движение тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ известно, а масса материальной точки P мала по сравнению с массой каждого из этих тел. В этой ситуации можно указать прием приближенного решения задачи о движении точки P, достаточно удовлетворительный для многих практических случаев. Сущность этого приема состоит в следующем.

Ту часть пространства, где происходит движение точки P, разбиваем мысленно на несколько частей (областей) $G_1, G_2, \ldots, G_n$, в каждой из которых учитываем влияние на точку P лишь *одного* из больших тел $T_1, \ldots, T_n$ и совершенно пренебрегаем влиянием остальных тел. (Такую область назовем «сферой влияния» соответствующего тела.) Таким образом, внутри каждой из сфер влияния истинная траектория точки P заменяется «невозмущенной» траекторией, которая представляет собой дугу конического сечения (эллипса, гиперболы и т. п.); точки стыка этих дуг лежат на границах смежных сфер влияния. Выбор самих сфер влияния, их размеров, формы и расположения стремятся произвести так, чтобы было минимальным «отклонение» кусочно-конической траектории от истинной траектории точки P. Сам термин «отклонение» может пониматься в разных задачах по-разному.

Наиболее распространенный способ выбора сфер влияния связан с понятием сферы действия: в случае движения малого тела P под влиянием только двух тел («звезд») внутри сферы действия меньшей звезды пренебрегают вовсе притяжением большей звезды, а вне этой сферы действия полностью пренебрегают притяжением меньшей звезды. Иначе говоря, за сферу влияния меньшей звезды принимают ее сферу действия, за сферу влияния большей звезды — всю остальную часть пространства *).

Аналогичным образом можно поступить и в том случае, когда траектория точки P определяется тяготением к *нескольким* телам. В частности, при расчете межпланетных перелетов иногда пренебрегают влиянием Солнца внутри сфер действия планет и влиянием планет вне этих сфер **).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При расчете полета второго советского лунника, попавшего в Луну, в начале полета пренебрегали вовсе влиянием Луны. Но после входа ракеты в сферу дей-

---

*) Отметим, что предложены также — и иногда заслуживают предпочтения — другие способы разбиения пространства на сферы влияния (см. [6.2]).

**) Масса Солнца настолько преобладает над массой планет (она составляет 99,86% всей материи солнечной системы) и расстояния между планетами настолько велики, что их сферы действия относительно Солнца расположены далеко одна от другой.

ствия Луны, на расстоянии примерно 66 000 *км* от центра Луны, перестали вовсе учитывать притяжение ракеты к Земле, а учитывали только притяжение ракеты к Луне.

Пример 2. Перигелии некоторых комет находятся вблизи орбиты Юпитера. В тех случаях, когда комета проходит вблизи Юпитера, при расчете ее орбиты можно внутри сферы действия Юпитера относительно Солнца, то есть внутри шара с центром в центре Юпитера и радиусом около $48 \cdot 10^6$ *км*, пренебречь возмущающим влиянием Солнца, а вне этой сферы действия — влиянием Юпитера.

Пример 3. При расчете полета к Венере советской автоматической межпланетной станции (1961 год) можно получить достаточно хорошее представление об этом полете, если

а) внутри сферы действия Земли, то есть внутри шара, описанного около Земли радиусом $\approx$ 930 000 *км*, пренебречь влиянием Солнца и Венеры (а учитывать только притяжение Земли);

б) после выхода из сферы действия Земли и до входа в сферу действия Венеры пренебречь притяжением и Земли и Венеры и учитывать только влияние Солнца;

в) после входа в сферу действия Венеры, то есть внутри шара, описанного около Венеры радиусом $\approx$ 600 000 *км*, пренебречь гравитационным воздействием Солнца и учитывать только влияние Венеры.

Приближенная методика обычно дает достаточно хорошее представление о траектории точки P, если движение P рассматривается в течение небольшого промежутка времени, происходит в основном вдали от границы сферы действия меньшей звезды и траектория тела P только один-два раза пересекает эту границу. В других случаях результаты, полученные с помощью такой методики, могут оказаться чересчур грубыми или даже просто ошибочными.

Когда точка P движется внутри сферы действия меньшей звезды, мы — в соответствии с приближенной методикой — вовсе пренебрегаем тем влиянием, которое на него оказывает бо́льшая звезда, пренебрегаем тем возмущающим ускорением, которое получает спутник P из-за притяжения к большей звезде. В действительности это ускорение хотя и мало «в глубине» сферы действия, но не равно нулю. После *длительного* воздействия этого ускорения орбита точки P может сильно отклониться от той, которую нам дает

приближенная методика. Чем ближе находится малое тело к границе сферы действия меньшей звезды, чем дольше оно движется вблизи этой границы, тем сильнее скажется на его движении возмущающее влияние большей звезды.

Возмущающее влияние большей звезды существенно скажется и в том случае, когда спутник длительное время движется хотя и «глубоко внутри» сферы действия меньшей звезды, но на больших расстояниях от этой звезды (например, на расстояниях того же порядка, что радиус действия меньшей звезды).

Так, например, обстояло дело с советской автоматической межпланетной станцией (АМС), запущенной 4 октября 1959 года в облет Луны. После завершения фотографирования обратной стороны Луны АМС двигалась *внутри* сферы действия Земли относительно Солнца (расстояние АМС от центра Земли не превышало $5 \cdot 10^5$ *км*, а радиус сферы действия Земли относительно Солнца равен примерно $9 \cdot 10^5$ *км*); АМС в то же время двигалась вне сферы действия Луны относительно Земли. Если бы по этим соображениям мы пренебрегли влиянием Солнца и Луны, то получили бы, что орбита спутника должна быть близка к эллипсу, имеющему одним из фокусов центр Земли. Однако такой вывод ложен: в действительности же из-за влияния Солнца и Луны минимальное расстояние АМС от Земли убывало с каждым витком и на 11-м витке (это было в конце марта 1960 года, то есть примерно через полгода после запуска) АМС вошла в плотные слои земной атмосферы и сгорела.

Заметим, что такая судьба АМС была заранее предсказана на основании теоретических расчетов, проведенных с учетом влияния Солнца и Луны.

Приближенная методика может привести к ошибочному выводу и тогда, когда точка P долго движется вне сферы действия меньшей звезды, но вблизи от этой сферы действия. На расстояниях от границы сферы действия того же порядка, что и радиус сферы действия, на траектории точки P еще достаточно сильно будет сказываться влияние меньшей звезды.

Это особенно важно учитывать при посылке космических ракет к другим планетам: небольшое отклонение ра-

кеты от расчетного курса у границы сферы действия Земли может повлечь за собой отклонение от намеченной цели на миллионы километров.

В следующих параграфах мы рассмотрим несколько примеров применения приближенной методики.

§ 3. ЗАДАЧА О ТРЕТЬЕЙ КОСМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ

Под геоцентрической скоростью точки (или скоростью относительно невращающейся Земли) понимают ее скорость относительно какой-либо системы отсчета с началом в центре Земли и осями координат, имеющими постоянную ориентацию в пространстве, то есть имеющими неизменную ориентацию относительно «неподвижных» звезд.

Получив у поверхности Земли геоцентрическую скорость, равную второй космической скорости *), ракета может преодолеть притяжение Земли, но она не сможет выйти за пределы солнечной системы. Выйдя из сферы действия Земли с малой скоростью относительно Земли, то есть со скоростью около 30 *км/сек* относительно Солнца, она начнет обращаться вокруг Солнца по эллипсу, мало отличающемуся от окружности и весьма близкому к орбите Земли.

Однако можно сообщить ракете настолько большую геоцентрическую скорость у поверхности Земли, чтобы она могла удалиться сколь угодно далеко от Солнца.

Под третьей *космической скоростью* понимают ту минимальную геоцентрическую скорость, которую должна иметь ракета после старта у поверхности Земли для того, чтобы она могла удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от Солнца.

При этом мы имеем в виду следующие оговорки:

1) влияние на ракету других тел, кроме Солнца и Земли, можно не учитывать.

2) получив третью космическую скорость, ракета должна уйти в бесконечность «на первом витке», то есть не совершив ни одного полного оборота ни вокруг Земли, ни вокруг Солнца,

3) не учитываются сплюснутость Земли, сопротивление атмосферы, вращение Земли вокруг своей оси.

---

*) См. главу II, § 7.

Кроме того, для упрощения рассуждений будем считать, что

1) орбита Земли относительно Солнца является окружностью (в действительности эксцентриситет земной орбиты равен примерно 0,017);

2) всюду внутри сферы действия Земли местная параболическая скорость относительно Солнца такая же, как на самой орбите Земли (в действительности разница может доходить до 0,3% от параболической скорости на орбите Земли).

В соответствии с приближенной методикой мы при решении этой задачи пренебрежем влиянием Солнца внутри

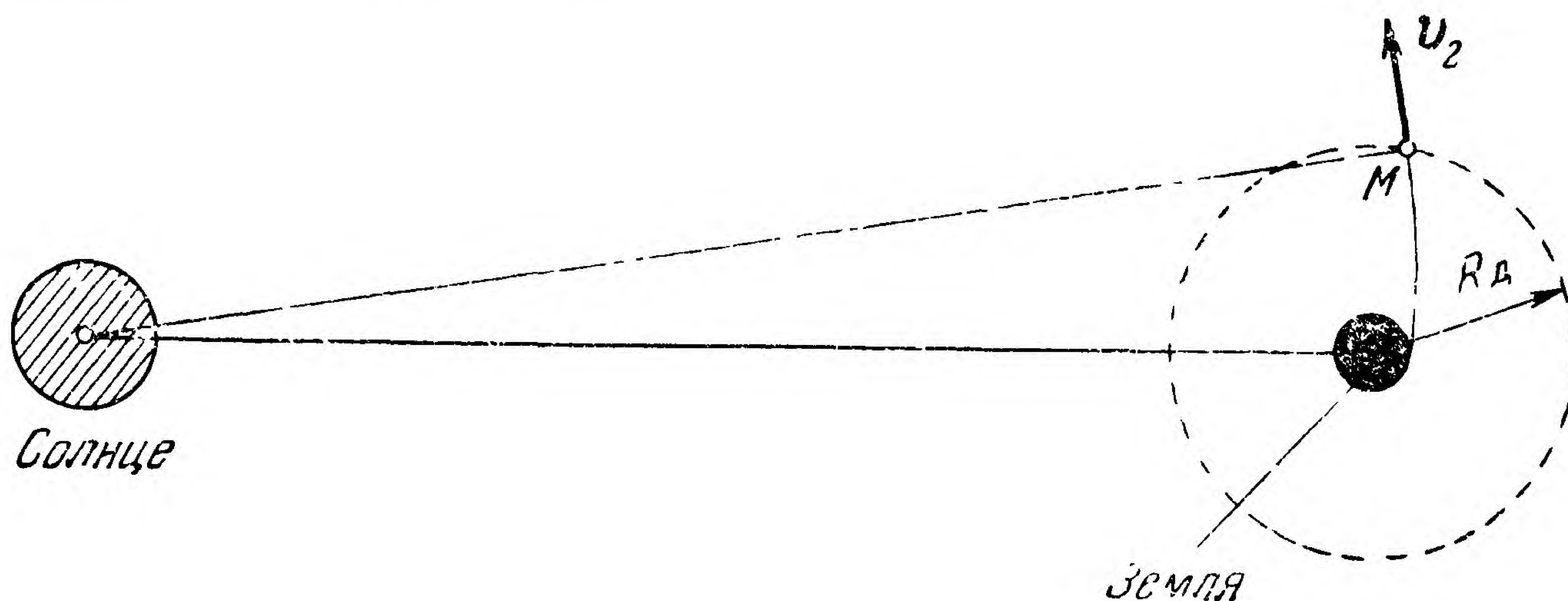


Рис. 6.4.

сферы действия Земли и влиянием Земли вне этой сферы действия. Для того чтобы ракета могла уйти в бесконечность, она при выходе из сферы действия Земли должна иметь относительно Солнца скорость

$$v_2 \geqslant v_{п.с}, \tag{1}$$

где $v_{п.с}$ — местная параболическая скорость относительно Солнца (рис. 6.4).

Пусть ракета получила у поверхности Земли геоцентрическую скорость $\boldsymbol{v}_0$ и подошла к границе сферы действия, имея скорость $\boldsymbol{v}_1$ (геоцентрическую). Пусть $v_0 = |\boldsymbol{v}_0|$, $v_1 = |\boldsymbol{v}_1|$; $r_З$, $K_З$ — радиус и гравитационный параметр Земли, $R_д$ — радиус сферы действия Земли. Из интеграла энергии (2.5.2) следует, что

$$v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д} = v_0^2 - \frac{2K_З}{r_З},$$

следовательно,

$$v_0^2 = v_1^2 + \frac{2K_З}{r_З} - \frac{2K_З}{R_Д}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что v_0 будет иметь минимальное значение тогда и только тогда, когда v_1 будет иметь минимальное значение.

Так как ракета при выходе из сферы действия Земли имеет скорость $\boldsymbol{v}_1$ относительно Земли, а сама геоцентрическая система отсчета вместе с Землей переносится в пространстве с некоторой скоростью $\boldsymbol{v}_{к.С}$ относительно Солнца ($v_{к.С} \approx 29{,}8$ *км/сек*), то ракета будет иметь *относительно Солнца* скорость

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{к.С}. \qquad (3)$$

Отсюда ясно, что

$$v_2 \leqslant v_1 + v_{к.С}. \qquad (4)$$

Вне сферы действия Земли учитываем только влияние Солнца. Для того чтобы ракета могла уйти бесконечно далеко от Солнца, ее скорость v_2 должна быть не меньше местной параболической скорости относительно Солнца $v_{п.С}$:

$$v_2 \geqslant v_{п.С}.$$

Итак, мы должны подобрать вектор скорости $\boldsymbol{v}_1$ так, чтобы величина v_1 имела *минимальное* значение, но вместе с тем выполнялись бы условия (4) и (1).

Этого мы достигнем тогда и только тогда, когда

$$v_1 = v_{п.С} - v_{к.С} \qquad (5)$$

и в момент выхода из сферы действия Земли направления векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_{к.С}$ одинаковы.

Из (2) получим

$$v_0^2 = (v_{п.С} - v_{к.С})^2 + \frac{2K_З}{r_З} - \frac{2K_З}{R_Д}.$$

Определяемая отсюда скорость v_0 и будет искомой третьей космической скоростью.

Упростим последнюю формулу. Поскольку

$$v_{п.С} = \sqrt{2}\, v_{к.С},$$

то

$$(v_{\text{п.с}} - v_{\text{к.с}})^2 = (3 - 2\sqrt{2})\, v_{\text{к.с}}^2 \approx 0{,}18 v_{\text{к.с}}^2.$$

Кроме того, $2K_{\text{З}}/r_{\text{З}}$ — это квадрат параболической скорости ракеты в точке у поверхности Земли $v_{\text{п.з}}$; $v_{\text{п.з}} \approx \approx 11{,}2$ *км/сек*,

$$\frac{2K_{\text{З}}}{R_{\text{д}}} = \frac{2K_{\text{З}}}{r_{\text{З}}} \frac{r_{\text{З}}}{R_{\text{д}}} \approx \frac{1}{140} v_{\text{п.з}}^2.$$

Поэтому

$$v_0 \approx \sqrt{(v_{\text{п.с}} - v_{\text{к.с}})^2 + v_{\text{п.з}}^2} \approx \sqrt{0{,}18 \cdot v_{\text{к.с}}^2 + v_{\text{п.з}}^2}, \qquad (6)$$

откуда

$$v_0 \approx 16{,}7 \text{ км/сек}.$$

Итак, третья космическая скорость (относительно Земли) составляет примерно 16,7 *км/сек*.

Понятие о третьей космической скорости можно ввести для любой планеты. Для ее вычисления пригодна формула (6), если в ней под $v_{\text{к.с}}$ понимать скорость кругового движения планеты вокруг Солнца, а под $v_{\text{п.з}}$ — параболическую скорость у поверхности планеты.

Задачи

1. Ракета стартует на высоте 230 *км* над Землей с параболической скоростью, направленной параллельно поверхности Земли. Какую скорость будет она иметь при подходе к границе сферы действия Земли? Сколько времени займет этот перелет?

2. Вычислите третью космическую скорость относительно Марса, Меркурия и Нептуна.

3. Солнце имеет в диаметре примерно $1{,}4 \cdot 10^6$ *км*. Какую минимальную начальную скорость (относительно Земли) следует сообщить ракете на высоте 230 *км* над поверхностью Земли параллельно этой поверхности для того, чтобы она могла упасть на Солнце? Притяжение Земли учитывать внутри ее сферы действия и пренебречь им вне этой сферы. Сколько времени будет падать ракета на Солнце?

4. Решите предыдущую задачу в предположении, что Солнце представляет собой материальную точку, но масса Солнца остается прежней.

5. Планируется запуск автоматической межпланетной станции (АМС) к орбите Марса. Отсечка последнего двигателя, разгоняющего станцию, должна произойти на расстоянии 6800 *км* от центра Земли. Величина и направление скорости $\boldsymbol{v}_0$ АМС в этот момент должны быть выбраны таким образом, чтобы АМС после выхода из сферы действия

Земли двигалась по орбите, касающейся орбиты Земли и орбиты Марса. Последние две орбиты для простоты считаются концентрическими окружностями, имеющими радиусы $R_З = 150 \cdot 10^6$ *км*, $R_М = 228 \cdot 10^6$ *км*. Найдите величину скорости v_0, необходимой для такого перелета.

6. Согласно одному из вариантов посылки АМС к Марсу пассивный участок ее траектории должен начаться на расстоянии 6800 *км* от центра Земли (то есть на высоте 530 *км*). Получив в начале пассивного участка геоцентрическую скорость v_0, АМС должна при выходе из сферы действия Земли иметь параболическую скорость относительно Солнца, направленную по касательной к орбите Земли. Какую скорость v_0 должна иметь АМС в момент отсечки последнего двигателя? Через какое время достигнет АМС орбиты Марса? При решении принять те же упрощающие допущения, что и в задаче 5.

§ 4. ПОЛЕТ К ВЕНЕРЕ

1. В этом параграфе мы проиллюстрируем на важном примере применение приближенной методики к расчету траектории полета космического аппарата к другим планетам.

Как известно, запуски межпланетных станций к Венере и Марсу были впервые осуществлены в Советском Союзе. Напомним некоторые опубликованные в печати данные об автоматической межпланетной станции (АМС), запущенной к Венере в 1961 году *). 12 февраля был запущен искусственный спутник Земли. Его орбита была близка к окружности: перигейное и апогейное расстояния были равны соответственно 6601 и 6658 *км*. В тот же день с борта ИСЗ стартовала космическая ракета, несшая АМС. В момент отделения АМС от ракеты скорость АМС превышала местную параболическую скорость на 661 *м/сек*. В 12 часов дня по московскому времени 12 февраля АМС находилась на расстоянии 126 300 *км* от Земли. При выходе из сферы действия Земли (точнее, на расстоянии 10^6 *км* от центра Земли) АМС имела относительно Солнца скорость 27,7 *км/сек*.

Мы здесь произведем расчет для некоторой *гипотетической* автоматической межпланетной станции. Исходные данные подберем таким образом, чтобы расчеты были проще, чем для случая реальной АМС. В то же время эти исходные данные будут подобраны так, чтобы траектория нашей воображаемой АМС была достаточно близка к траектории реальной АМС, запущенной 12 февраля 1961 года.

---

*) См. газету «Правда» за 26 февраля 1961 года.

Итак, вообразим себе, что 12 февраля 1961 года была запущена к Венере автоматическая межпланетная станция, относительно которой известно следующее. АМС стартовала непосредственно с искусственного спутника Земли, двигавшегося вокруг Земли по окружности радиуса $\rho = 6630$ *км*. При этом полагаем, что именно в момент старта с борта ИСЗ АМС получила скорость, превышающую местную параболическую скорость на 0,660 *км/сек* *).

Будем полагать, что в момент отключения двигателя, разгонявшего АМС, вектор скорости АМС был направлен параллельно поверхности Земли. Далее, пусть известно, что 12 февраля в 12 часов дня АМС находилась на расстоянии 126 300 *км* от *поверхности* Земли. Кроме того, примем, что в момент выхода из сферы действия Земли скорость АМС составляла 27,6 *км/сек*.

2. Заметим, что приведенные выше данные позволяют подсчитать тот момент, когда наша воображаемая АМС должна была стартовать с борта ИСЗ. На расстоянии $\rho = 6630$ *км* от центра Земли параболическая скорость равна

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2K_З}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398\,600}{6630}} = \sqrt{120{,}25} = 10{,}96 \text{ км/сек}.$$

В силу нашего допущения, что АМС при старте с ИСЗ сразу же получила скорость, превышающую $v_{\text{пар}}$ на 0,660 *км/сек*, скорость АМС при старте с борта ИСЗ составляла $v_0 = v_{\text{пар}} + 0{,}660 = 11{,}62$ *км/сек*.

12 февраля, в 12 часов дня по московскому времени, АМС находилась уже на расстоянии 126 300 *км* от поверхности Земли и, значит, на расстоянии $r_1 = 132\,700$ *км* от центра Земли. Обозначим через τ_1 время, протекшее от момента старта АМС с борта ИСЗ до 12 часов 12 февраля. Получив скорость, превышающую местную параболическую скорость, АМС стала двигаться по гиперболической орбите. Пусть ε_1 — ее эксцентриситет, $|a_1|$ — длина ее веществен-

---

*) Заметим, что последнее допущение является совершенно нереальным. В действительности для разгона межпланетной станции до такой скорости требуется некоторое время, и после этого времени АМС должна была удалиться от орбиты несшего ее искусственного спутника на некоторое расстояние (см. решение задачи 9 из § 9 главы II). Однако в нашем, чисто иллюстративном, примере мы себе разрешим считать, что прирост скорости АМС произошел мгновенно.

ной полуоси. Воспользуемся уравнением Кеплера применительно к гиперболическому движению [см. (3.2.19)]:

$$|n_1|\tau_1 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_1 - H_1. \tag{1}$$

Для нахождения $|a_1|$, ε_1, $|n_1|$ можно привлечь уравнения

$$r_1 = |a_1|(\varepsilon_1 \operatorname{ch} H_1 - 1), \tag{2}$$

$$v_0^2 = K_З\left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{|a_1|}\right), \tag{3}$$

$$\rho = |a_1|(\varepsilon_1 - 1), \tag{4}$$

$$|n_1| = \sqrt{K_З/|a_1|^3}. \tag{5}$$

Из (3) определим $|a_1|$, из (4) ε_1, из (5) $|n_1|$, из (2) $\operatorname{ch} H_1$, а затем $\operatorname{sh} H_1$ и H_1 (по таблицам гиперболических функций). После этого из (1) можно найти τ_1. А затем уже легко подсчитать момент t_0 старта АМС с ИСЗ. Приведем соответствующие вычисления:

$$h_1 = v_0^2 - \frac{2K_З}{\rho} = 11{,}62^2 - \frac{2\cdot 398\,600}{6630} = 14{,}77,$$

$$|a_1| = \frac{K_З}{h_1} = \frac{398\,600}{14{,}77} = 26\,980 \text{ (км)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho}{|a_1|} + 1 = \frac{6630}{26\,980} + 1 = 1{,}246,$$

$$|n_1| = \frac{\sqrt{K_З/|a_1|}}{|a_1|} = \frac{\sqrt{|h_1|}}{|a_1|} = \frac{\sqrt{14{,}77}}{26\,980} = \frac{3{,}843}{26\,980};$$

$$\operatorname{ch} H_1 = \frac{\dfrac{r_1}{|a_1|} + 1}{\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{132\,700}{26\,980} + 1}{1{,}246} = 0{,}1424\cdot 10^{-3}.$$

По таблицам [0.19] находим $H_1 = 2{,}240$, $\operatorname{sh} H_1 = 4{,}644$. Поэтому

$$|n_1|\tau_1 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_1 - H_1 = 3{,}5450.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{3{,}5450\cdot 10^3}{0{,}1424} = 24\,890 \text{ (сек)},$$

то есть $\tau_1 \approx 6$ часов 55 минут.

Итак, от момента старта АМС с борта ИСЗ прошло около 6 часов 55 минут. Значит, АМС стартовала с борта ИСЗ утром 12 февраля примерно в 5 часов по московскому времени:

$$t_0 \approx 5 \text{ часов.}$$

3. Радиус действия Земли $R_{д.з.}$ относительно Солнца примем равным 10^6 *км*. В соответствии с описанной выше приближенной методикой внутри сферы действия Земли полностью пренебрегаем влиянием Солнца и планет и учитываем только влияние Земли. При таком допущении орбиту АМС (внутри этой сферы) можно считать гиперболической. На больших расстояниях от Земли АМС практически двигалась прямолинейно по асимптоте к этой гиперболе.

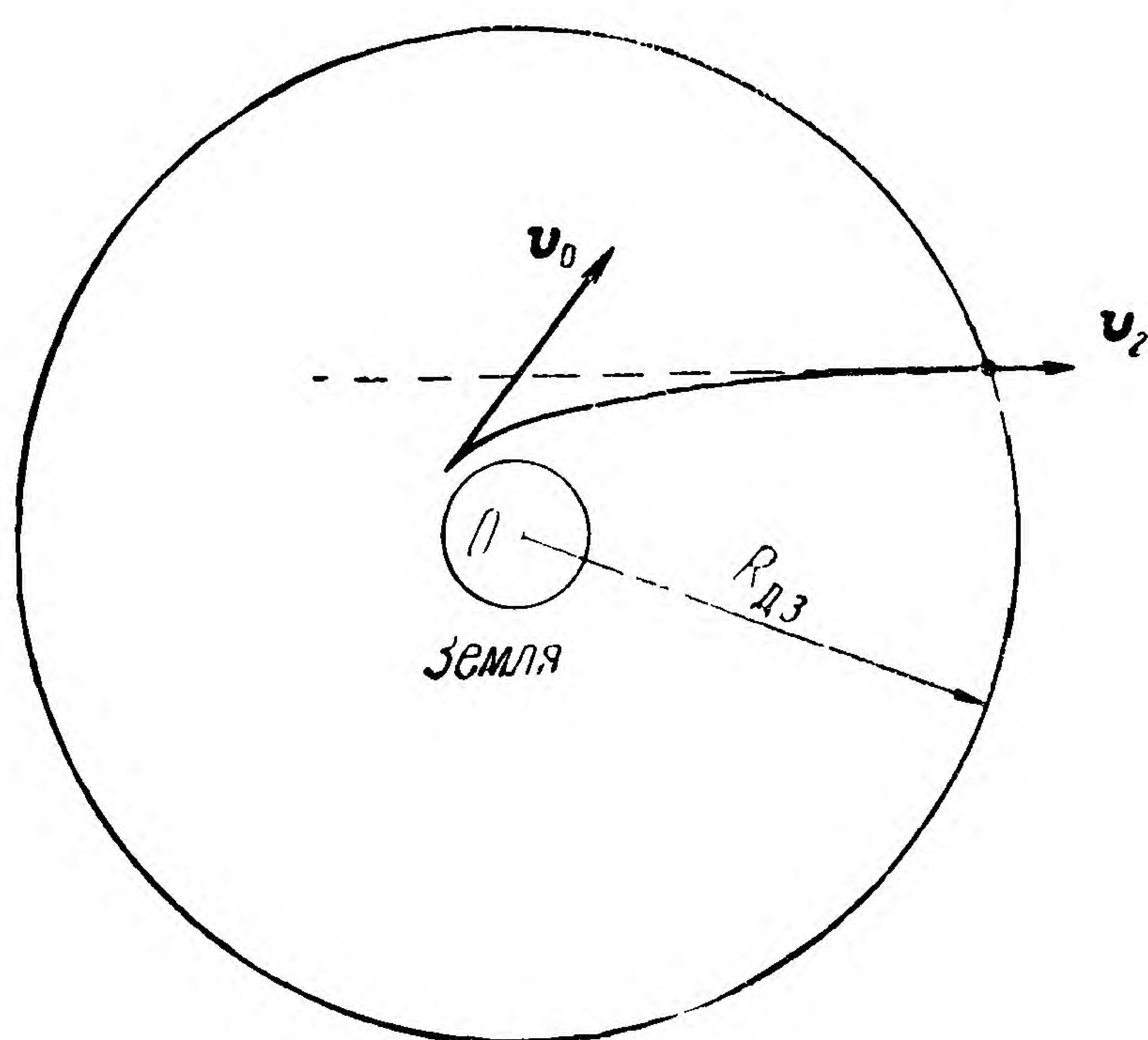


Рис. 6.5.

Скорость v_2 относительно Земли, с которой АМС подошла к границе сферы действия Земли (рис. 6.5), найдем, пользуясь интегралом энергии:

$$v_2^2 = \frac{2K_З}{R_{д.з}} + h, \qquad v_0^2 = \frac{2K_З}{\rho} + h,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} v_2^2 = v_0^2 - \frac{2K_З}{\rho} + \frac{2K_З}{R_{д.з}} = 14{,}77 + 0{,}80 = 15{,}57,\\ v_2 = 3{,}95 \ (км/сек). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При помощи уравнения Кеплера легко подсчитать момент времени t_2, когда АМС подошла к границе сферы действия Земли.

Действительно, время τ_2, прошедшее от момента старта АМС с борта ИСЗ до момента ее подхода к границе сферы

действия Земли, определяется по формуле

$$|n_1|\ \tau_2 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} H_2 - H_2, \qquad (7)$$

где H_2 удовлетворяет условию

$$R_{д.з} = |a_1|\ (\varepsilon_1 \operatorname{ch} H_2 - 1). \qquad (8)$$

Отсюда

$$\operatorname{ch} H_2 = \frac{\frac{R_{д.з}}{|a_1|}+1}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{10^6}{26\,980}+1}{1,246} = 30,56.$$

По таблицам найдем

$$\operatorname{sh} H_2 = 30,53, \quad H_2 = 4,112, \quad \varepsilon \operatorname{sh} H_2 - H_2 = 33,93,$$

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_1 \operatorname{sh} H_2 - H_2}{|n_1|} = \frac{33,93}{0,1424}\,10^3 = 238\,300\ (сек) \approx$$

$$\approx 66,19\ (час) \approx 2\ сут\ 18\ час.$$

Зная момент t_0 старта АМС, легко найти, что АМС должна была подойти к границе сферы действия Земли 14 февраля примерно в 23 часа.

По условию мы знаем гелиоцентрическую скорость v_2 АМС при выходе из сферы действия Земли ($v_2 = 27,6$ *км/сек*). Этого достаточно, как увидим ниже, для нахождения формы и размеров околосолнечной орбиты АМС.

4. Земля движется вокруг Солнца по эллипсу с малым эксцентриситетом $\varepsilon_З = 0,01673 \approx \frac{1}{60}$. Средняя скорость Земли (то есть скорость, которую имела бы Земля, двигаясь вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным большой полуоси ее орбиты) равна 29,76 *км/сек*. Учтем эллиптичность орбиты Земли.

Подсчитаем для середины февраля (14—15 февраля) следующие величины: расстояние $R_З$ Земли от центра Солнца, скорость $v_З$ движения Земли относительно Солнца по ее орбите и ее составляющие v'_r и v'_n, угол между вектором скорости Земли и ее радиусом-вектором. Воспользуемся для этого приближенными формулами из § 4 главы III.

Земля находилась в перигелии 2—3 января. От этого момента до момента выхода АМС из сферы действия Земли прошло примерно полтора месяца. Поэтому средняя

аномалия Земли составляла в середине февраля

$$M = n_3 t = \frac{360^\circ}{12} 1{,}5 = 45^\circ,$$

$$\cos M = \sin M \approx 0{,}707.$$

По приближенным формулам из § 4 главы III находим

$$R_3 = a_3 (1 - \varepsilon_3 \cos M) = 149{,}60 \cdot 10^6 (1 - 0{,}01673 \cdot 0{,}707) \approx$$
$$\approx 147{,}83 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$v_r' \approx n_3 a_3 \varepsilon_3 \sin M, \qquad v_n' = n_3 a_3 (1 + \varepsilon_3 \cos M).$$

Поэтому

$$v_n' = v_{\text{ср}} (1 + \varepsilon_3 \cos M) \approx 29{,}76 (1 + 0{,}012) \approx 30{,}11 \text{ км/сек},$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\varepsilon_3 \sin M}{1 + \varepsilon_3 \cos M} = \frac{0{,}0118}{1{,}0118} = 0{,}01167, \quad \alpha' \approx 40',$$

$$v_3 = v_n' \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha')^2} \approx 30{,}11 \text{ км/сек}.$$

5. Очевидно (рис. 6.6), что скорость АМС относительно Солнца $\boldsymbol{v}$ может быть получена из скорости АМС относительно Земли $\boldsymbol{v}_2$ путем прибавления скорости Земли относительно Солнца $\boldsymbol{v}_3$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3.$$

Из треугольника со сторонами v, v_2, v_3 (рис. 6.6) легко найдем угол $\angle KPN = \alpha$, а следовательно, и $\angle SPN \equiv \varphi = 90^\circ + \alpha' - \alpha$. Затем можно вычислить составляющие скорости АМС (радиальную и поперечную): $v_r = -v \cos \varphi$ и $v_n = v \sin \varphi$. Применяя теорему косинусов и учитывая (6), получим:

$$\cos \alpha = \frac{v^2 + v_3^2 - v_2^2}{2 v v_3} = \frac{27{,}6^2 + 30{,}1^2 - 15{,}6}{2 \cdot 27{,}6 \cdot 30{,}1} \approx 0{,}9943.$$

Отсюда

$$\alpha \approx 6^\circ 0'; \quad \varphi = 90^\circ + \alpha' - \alpha \approx 84^\circ 40'.$$

Вычислим v_n:

$$v_n = v_0 \sin \varphi = 27{,}6 \cdot 0{,}9956 = 27{,}48 \text{ км/сек}.$$

6. После выхода АМС из сферы действия Земли и до ее подхода к сфере действия Венеры учитываем только влияние Солнца и пренебрегаем влиянием Земли, Венеры и других небесных тел на АМС. При таких условиях траекторию АМС можно теперь считать коническим сечением с фокусом в центре Солнца. Подсчитаем последовательно величины σ, p, a, ε, r_π, r_α:

$$\sigma = R_З v_n = 147{,}8 \cdot 10^6 \times 27{,}48 = 4061{,}5 \cdot 10^6,$$

$$p = \frac{\sigma^2}{K_С} = \frac{1650 \cdot 10^{16}}{1325 \cdot 10^8} = 124{,}5 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Вычислим a:

$$a = -K_С/h.$$

$$h = v^2 - \frac{2K_С}{R_З} = 761{,}8 - 1793 = -1031,$$

$$a = -\frac{K_С}{h} = \frac{1325 \cdot 10^8}{1031} = 128{,}5 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

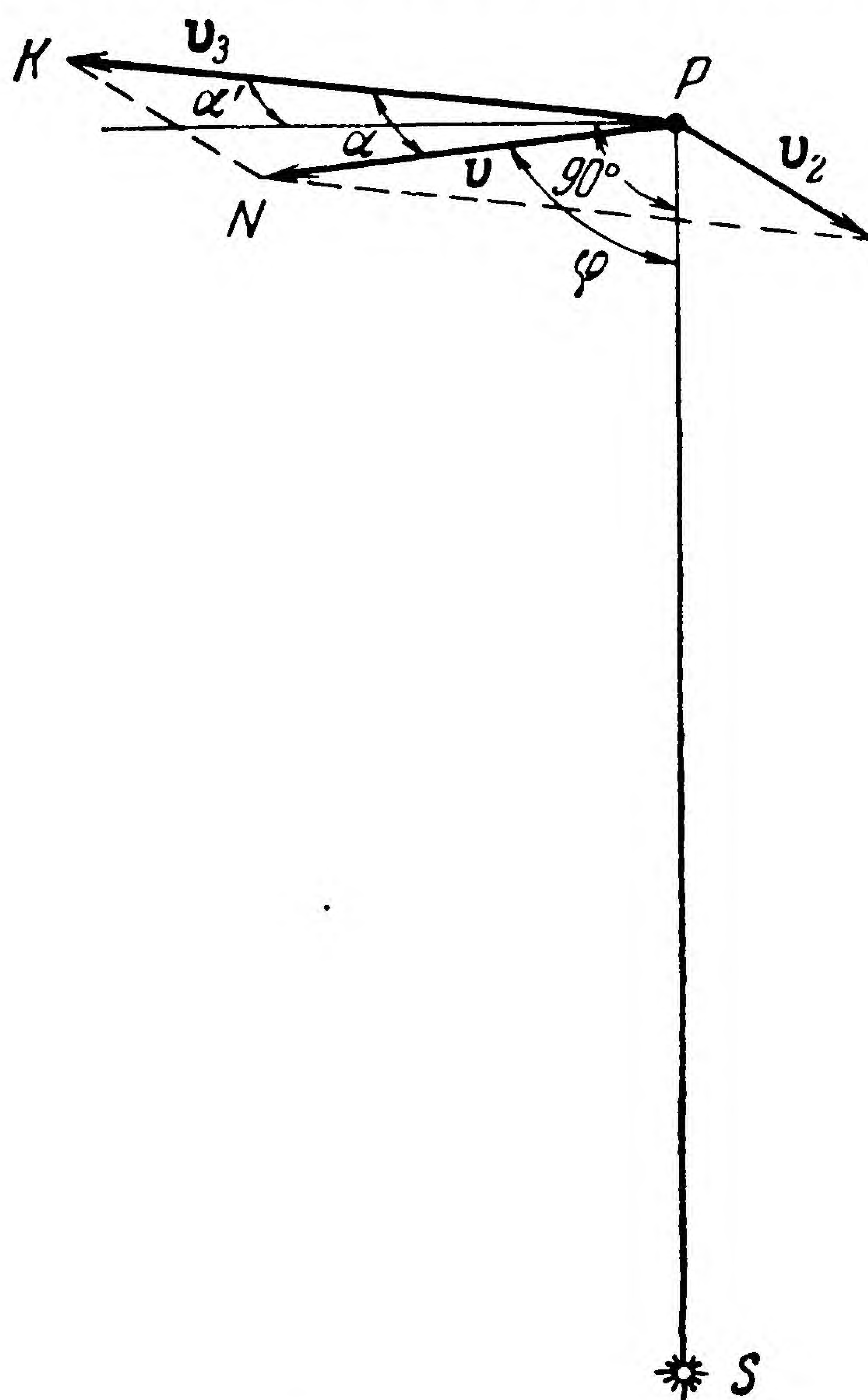


Рис. 6.6.

Подсчитаем теперь ε. Имеем: $p = a(1 - \varepsilon^2)$, откуда

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a} = \frac{a - p}{a} = \frac{4{,}0}{128{,}5} = 0{,}0311,$$

$$\varepsilon = 0{,}176.$$

Вычислим расстояние от Солнца до перигелия и афелия орбиты АМС:

$$\varepsilon a = 0{,}176 \cdot 128{,}5 \cdot 10^6 \approx 22{,}6 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$r_\pi = a - \varepsilon a = 128{,}5 \cdot 10^6 - 22{,}6 \cdot 10^6 \approx 106 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$r_\alpha = a + \varepsilon a \approx 151 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

7. Покажем, каким образом можно предсказать момент сближения АМС с Венерой. Пусть C — какая-либо точка (рис. 6.7), в которой оказалась АМС при выходе из сферы

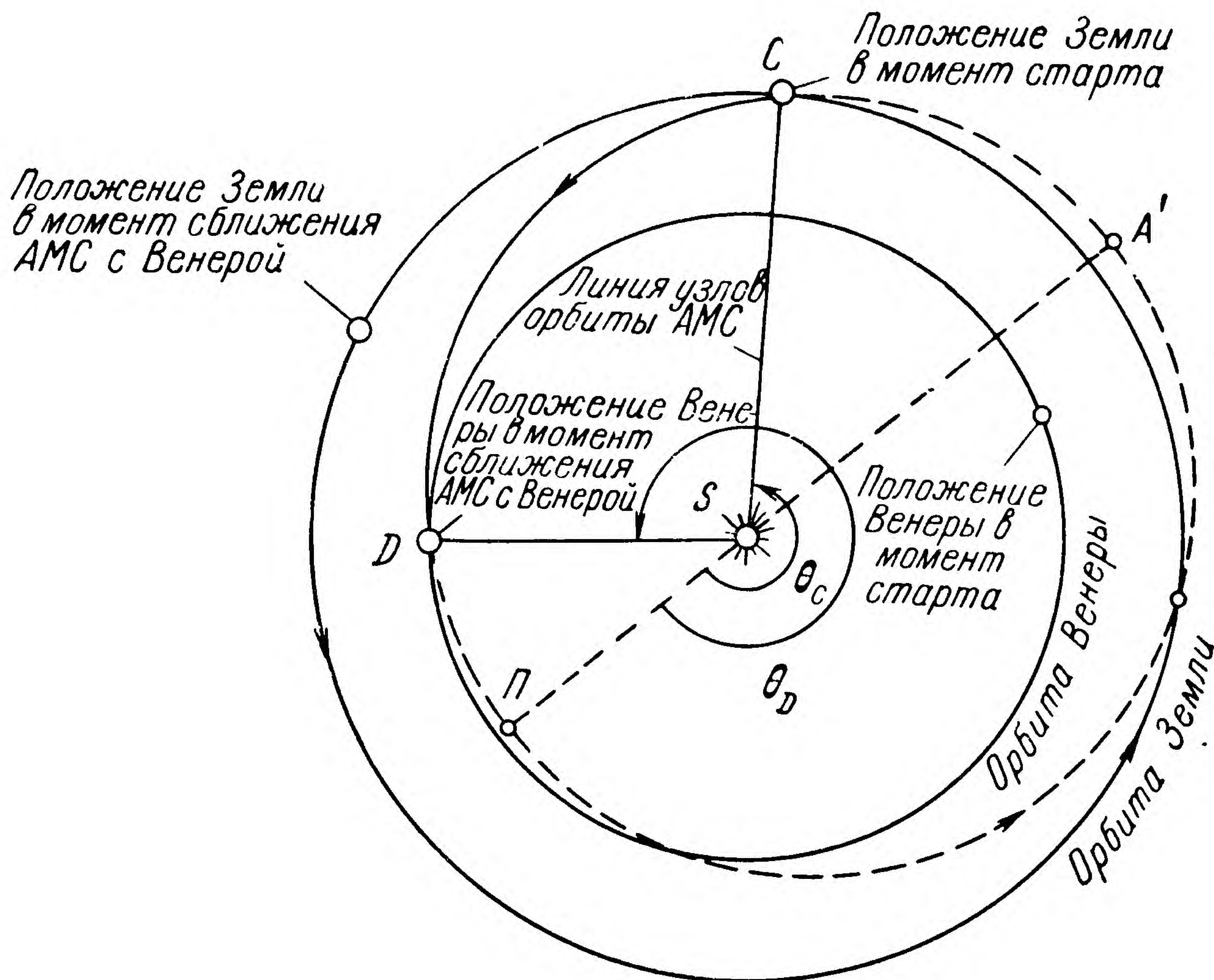


Рис. 6.7.

действия Земли, D — точка встречи траектории АМС с орбитой Венеры. Дуга CD представляет собой дугу эллипса. Подсчитаем, сколько времени τ должен был занять перелет по этой дуге. Удобнее всего воспользоваться для этого формулой Ламберта (см. § 5 главы III).

а) Сначала вычислим истинные аномалии θ_C и θ_D точек C и D. Из уравнения орбиты АМС следует, что

$$R_З = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta_C},$$

$$\cos \theta_C = \frac{p - R_З}{\varepsilon R_З} = -\frac{147,8 - 124,5}{0,176 \cdot 147,8} = -0,8957,$$

$$\theta_C = 206^\circ.$$

Орбита Венеры значительно ближе к окружности, чем орбита Земли, и имеет эксцентриситет около 0,006. Поэтому

мы можем в наших расчетах принять, что при подходе АМС к орбите Венеры (к сфере действия Венеры) расстояние от Венеры до центра Солнца было равно большой полуоси ее орбиты, то есть $R_В = 108{,}1 \cdot 10^6$ *км*.

Определим истинную аномалию θ_D АМС в этот момент:

$$R_В = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta_D},$$

откуда

$$\cos \theta_D = \frac{p - R_В}{\varepsilon R_В} = \frac{124{,}5 - 108{,}1}{0{,}176 \cdot 108{,}1} = 0{,}8618, \quad \theta_D \approx 329^\circ.$$

«Угловая дальность» между точками C и D равна

$$\theta_D - \theta_C \approx 123^\circ.$$

б) Чтобы воспользоваться формулой Ламберта, надо еще найти длину s хорды CD.

$$s^2 = R_З^2 + R_В^2 - 2R_З \cdot R_В \cos (\theta_D - \theta_C) \approx 495 \cdot 10^{14},$$

$$s \approx 222 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

в) $$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{R_З + R_В + s}{2a} = 1 - \frac{478}{257} = -0{,}860,$$

$$\lambda_1 = 2{,}607, \quad \sin \lambda_1 = 0{,}510,$$

$$\cos \lambda_2 = 1 - \frac{R_З + R_В - s}{2a} = 1 - \frac{34}{257} = 0{,}867,$$

$$\lambda_2 = 0{,}522, \quad \sin \lambda_2 = 0{,}498.$$

г) $$n = \sqrt{\frac{K_C}{a^3}} = \sqrt{\frac{K_C}{a}} : a = \sqrt{-h} : a =$$

$$= \sqrt{1031} : (128{,}5 \cdot 10^6) = \frac{1}{4 \cdot 10^6}.$$

д) По формуле Ламберта

$$n\tau = \lambda_1 - \lambda_2 - (\sin \lambda_1 - \sin \lambda_2) = 2{,}085 - 0{,}012 = 2{,}073.$$

Поэтому $\tau = 2{,}073 \cdot 4 \cdot 10^6$ *сек* ≈ 96 *дней*.

Итак, АМС должна подойти к орбите Венеры примерно через 96 дней после выхода из сферы действия Земли. Так как к этому времени на том же участке орбиты должна была оказаться Венера, то ее притяжение немного ускорит движение АМС. Таким образом, сближение АМС с Венерой должно было произойти примерно через 96 суток после 14 февраля, иными словами, около 20 мая 1961 года.

Сравним еще гелиоцентрические скорости АМС и Венеры при подходе АМС к сфере действия Венеры. Пусть в это время v_B — скорость Венеры, v_{rB} и v_{nB} — ее радиальная и поперечная составляющие. Можно принять, что $v_{rB}=0$ (ибо орбита Венеры очень близка к окружности). Поэтому

$$v_{nB} \approx v_B = \sqrt{K/R_B} = \sqrt{(1{,}325\cdot 10^{11})/(1{,}081\cdot 10^8)} \approx 35{,}0 \text{ км/сек}.$$

Обозначим через $v_{r\Lambda}$ и $v_{n\Lambda}$ радиальную и поперечную компоненты скорости АМС (относительно Солнца), а через v_4 — ее скорость относительно Венеры. Тогда

$$v_{r\Lambda} = \frac{\sigma}{p}\,\varepsilon\sin\theta_D = \frac{4061{,}5\cdot 10^6\cdot 1{,}76}{124{,}5\cdot 10^6}\,0{,}53 \approx 3{,}1 \text{ км/сек},$$

$$v_{n\Lambda} = \frac{\sigma}{R_3} = 37{,}6 \text{ км/сек};$$

$$v_\Lambda = \sqrt{v_{r\Lambda}^2 + v_{n\Lambda}^2} \approx 37{,}6 \text{ км/сек},$$

$$v_{n\Lambda} - v_{nB} \approx 2{,}6 \text{ км/сек},$$

$$v_{r\Lambda} - v_{rB} \approx 3{,}1 \text{ км/сек}.$$

Таким образом, при подходе к сфере действия Венеры (18—19 мая) АМС догоняла Венеру со скоростью v_4, равной примерно $\sqrt{2{,}6^2+3{,}1^2} = \sqrt{16{,}37} \approx 4{,}0$ *км/сек*. Так как радиус сферы действия Венеры составляет около 600 000 *км*, то легко проверить, что такая скорость относительно Венеры на границе сферы действия Венеры является гиперболической. Действительно, пусть K_B — гравитационный параметр Венеры, $R_{д.B}$ — ее радиус действия, h_B — константа энергии АМС при ее движении относитель-

но Венеры. Известно, что $K_{В} \approx 326\,000$ *км*^{3}/*сек*^{2}. Но

$$h_{В} = v_4^2 - \frac{2K_{В}}{R_{д.В}} = 16{,}37 - \frac{2 \cdot 326 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^5} > 0.$$

Следовательно, когда АМС попала в сферу действия Венеры, то внутри этой сферы действия АМС двигалась относительно Венеры по гиперболе.

Имея гиперболическую скорость относительно Венеры, АМС должна была выйти из сферы действия этой планеты. После этого она опять стала двигаться вокруг Солнца по эллиптической орбите. Однако эта эллиптическая орбита значительно отличается от той орбиты, по которой АМС двигалась до входа в сферу действия Венеры.

ГЛАВА VII

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ряде случаев рассмотренная в предыдущей главе приближенная методика может привести к слишком грубым или даже ошибочным выводам потому, что мы *полностью пренебрегаем* в отдельных областях пространства влиянием всех тел кроме одного. Решение же задачи о движении нескольких тел при *полном учете* их взаимного притяжения приводит к слишком громоздким уравнениям.

Однако при решении задач космонавтики и многих задач астрономии можно воспользоваться некоторыми упрощающими обстоятельствами:

а) часто можно ограничиться рассмотрением системы, состоящей только из трех тел (например, Земля — Луна — ракета);

б) масса одного из тел настолько ничтожна по сравнению с массами двух других тел, что можно полностью пренебречь теми ускорениями, которые приобретают два «больших» тела из-за притяжения к «малому» телу (как мы уже раньше заметили, это равносильно тому, что мы пренебрегаем *силами*, с которыми малое тело притягивает к себе большие тела, то есть рассматриваем малое тело как непритягивающее);

в) массу каждого из трех тел можно считать сосредоточенной в его барицентре, так что вместо трех тел можно говорить о трех материальных точках.

При этих предположениях движение двух больших тел не зависит от движения малого тела и мы приходим к рассмотрению следующей задачи.

Считая известным движение двух материальных точек («звезд») (A_1, m_1) и (A_2, m_2) относительно их барицентра, изучить движение третьей материальной точки («спутника»)

(P, m) при условии, что ее притягивает каждая из двух звезд, но она сама ни одну из этих звезд не притягивает*).

Эта задача носит название *ограниченной задачи трех тел* («ограниченная» — ибо на массу одного из тел — спутника — наложено ограничение: она предполагается непритягивающей).

Иногда притягивающие материальные точки называют активно гравитирующими, а непритягивающую точку — пассивно гравитирующей.

Ограниченную задачу трех тел впервые рассматривал Л. Эйлер в связи с теорией движения Луны (1772 год). В прошлом столетии эту задачу изучали немецкий математик К. Г. Якоби, американский астроном Дж. В. Хилл, французский математик А. Пуанкаре, русский математик А. М. Ляпунов и др. Хилл применил эту задачу к построению своей теории движения Луны.

Большое внимание привлекла эта задача в XX веке (работы Т. Леви-Чивиты, Дж. Биркгофа, Н. Д. Моисеева, Г. Н. Дубошина и др.).

Один из наиболее простых вариантов ограниченной задачи трех тел возникает при следующих дополнительных условиях:

а) меньшая звезда движется вокруг большей по окружности;

б) в инерциальном пространстве спутник и обе звезды движутся в одной и той же плоскости.

Этот вариант ограниченной задачи трех тел называется *ограниченной плоской круговой задачей трех тел.* К этой задаче сводится, например, изучение движения космической ракеты под воздействием Земли и Солнца в случае, когда орбита ракеты находится в плоскости эклиптики.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

1. Пусть две активно гравитирующие материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) движутся относительно их барицентра C по окружностям. Нас интересует движение пассивно гравитирующей материальной точки (P, m)

*) Термины «звезда» и «спутник» (системы двух притягивающих центров) употребляются здесь условно, исключительно ради краткости.

«спутника») в гравитационном поле, создаваемом этими двумя «звездами».

Выберем правоориентированную прямоугольную систему координат $CXYZ$ (рис. 7.1) с началом в барицентре C двух звезд (A_1, m_1) и (A_2, m_2) и с осями, постоянно ориентированными в пространстве. При этом ось абсцисс CX изберем таким образом, чтобы она совпала с осью CA_1 в какой-то начальный момент времени $(t = 0)$; за плоскость CXY примем плоскость, в которой движутся материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) относительно их барицентра; положительное направление оси аппликат CZ выберем таким образом, чтобы из каждой точки положительного луча этой оси движение точек A_1 и A_2 относительно их барицентра было видно проходящим против часовой стрелки.

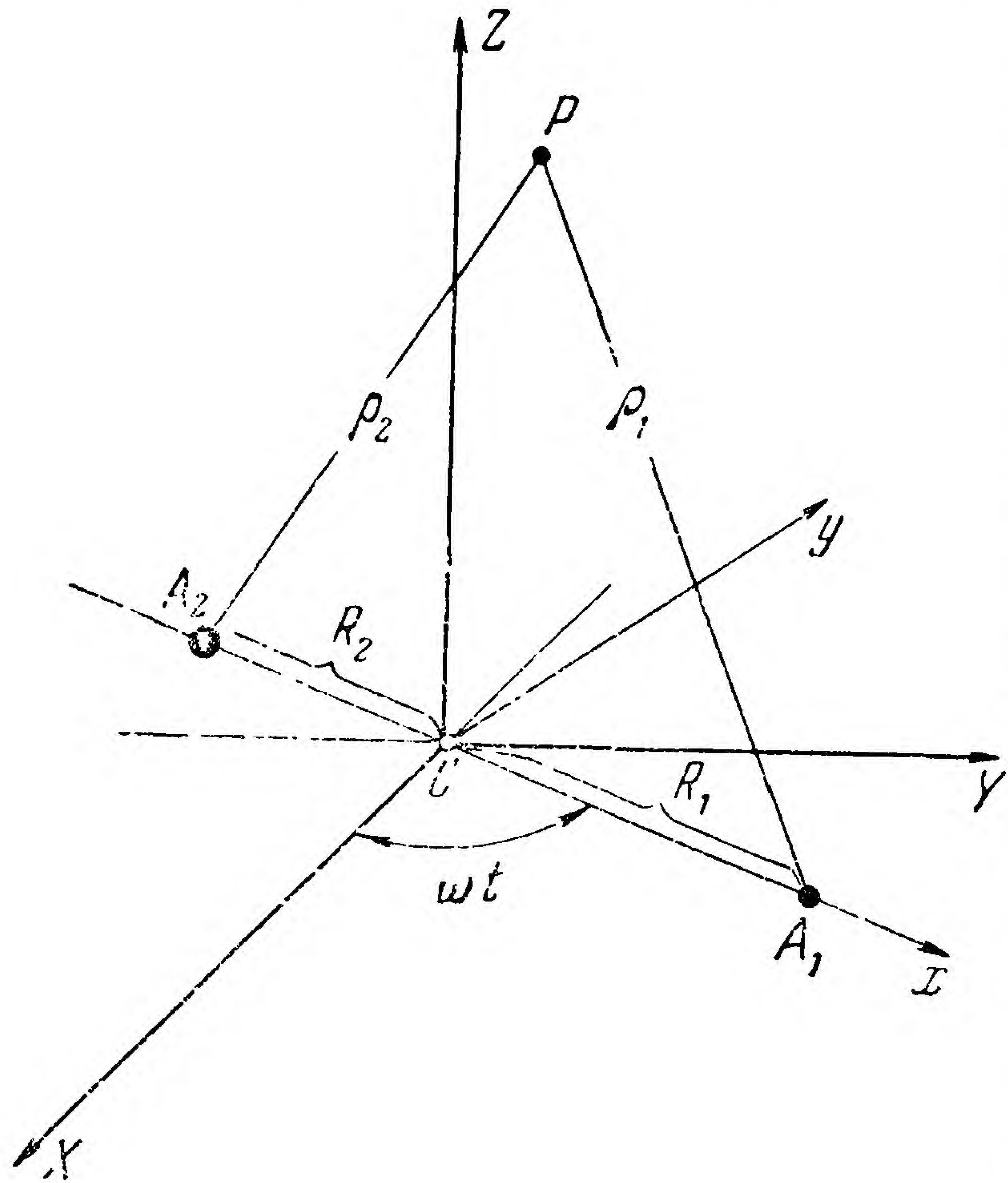


Рис. 7.1.

Введем обозначения:

$$\overrightarrow{CA_1} = \boldsymbol{R}_1, \quad \overrightarrow{CA_2} = \boldsymbol{R}_2, \quad \overrightarrow{CP} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A_1P} = \boldsymbol{\rho}_1, \quad \overrightarrow{A_2P} = \boldsymbol{\rho}_2, \quad a = A_2A_1, \\ M = m_1 + m_2, \quad \mu = m_1/M. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как C — барицентр точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2), то $m_1R_1 = m_2R_2$. Кроме того, $R_1 + R_2 = a$. Отсюда следует, что

$$R_1 = \mu a, \quad R_2 = (1 - \mu) a. \tag{3}$$

Силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, с которыми звезды (A_1, m_1) и (A_2, m_2) притягивают точку (P, m), равны соответственно

$$fm_1m(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R})/\rho_1^3 \text{ и } fm_2m(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R})/\rho_2^3. \tag{4}$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

откуда

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}). \qquad (5)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения точки (P, m) в инерциальной системе $CXYZ$.

2. Известный немецкий математик К. Г. Якоби еще в 1834 году заметил, что ценную информацию о движении спутника (P, m) можно получить, если перейти к другой системе отсчета, а именно, к системе отсчета, вращающейся вокруг оси CZ вместе с осью A_2A_1.

Выберем новую (уже неинерциальную) правоориентированную систему отсчета $Cxyz$. Пусть осью абсцисс Cx в *каждый* момент времени (не только при $t = 0$!) служит ось CA_1, плоскость Cxy совпадает с плоскостью CXY, а ось Cz — с осью CZ.

Обозначим через ω угловую скорость, с которой звезды A_1 и A_2 обращаются вокруг их барицентра. Таким образом, новая система координат вращается вокруг оси CZ с угловой скоростью ω.

В этом параграфе мы выведем дифференциальные уравнения движения спутника P во *вращающейся* системе отсчета $Cxyz$. Предварительно установим одно вспомогательное тождество.

Обозначим единичные векторы осей системы координат $CXYZ$ через $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ соответственно, а системы координат $Cxyz$ — через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Пусть координаты точки P в этих системах отсчета соответственно равны X, Y, Z и x, y, z. Тогда

$$\boldsymbol{R} = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} + Z\boldsymbol{K}. \qquad (6)$$

Положим

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (7)$$

Понятно, что

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}.$$

Ускорение точки P относительно системы отсчета $CXYZ$ определяется по формуле

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{X}\boldsymbol{I} + \ddot{Y}\boldsymbol{J} + \ddot{Z}\boldsymbol{K}, \tag{8}$$

а скорость и ускорение той же точки P относительно системы отсчета $Cxyz$ — по аналогичным формулам

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$

Выразим $\ddot{\boldsymbol{R}}$ через $\ddot{\boldsymbol{r}}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r}$ и ω.

Нетрудно убедиться в том, что

$$X = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \quad Y = x\sin\omega t + y\cos\omega t, \quad Z = z \tag{10}$$

и

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}\cos\omega t - \boldsymbol{j}\sin\omega t, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{i}\sin\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t, \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}). \tag{11}$$

Если, пользуясь формулами (10), вычислить $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ и подставить полученные выражения вместе с величинами $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ в формулу (8), то после упрощений получим:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} + 2\omega(-\dot{y}\boldsymbol{i} + \dot{x}\boldsymbol{j}) - \omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}). \tag{12}$$

Введем в рассмотрение (как это часто делается в механике) *вектор* угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}.$$

Тогда, воспользовавшись тождеством $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, равенство (12) можно переписать так:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{13}$$

Это и есть искомое вспомогательное тождество.

3. Перейдем теперь к выводу уравнения движения спутника P во *вращающейся* системе отсчета $Cxyz$.

Пусть звезды A_1 и A_2 имеют в системе отсчета $CXYZ$ координаты $(X_1, Y_1, 0)$ и $(X_2, Y_2, 0)$. В системе отсчета $Cxyz$ они имеют координаты $(x_1, 0, 0)$ и $(x_2, 0, 0)$, где $x_1 = (1-\mu)a$ и $x_2 = -\mu a$. Ясно, что

$$\boldsymbol{R}_1 = X_1\boldsymbol{I} + Y_1\boldsymbol{J}, \quad \boldsymbol{R}_2 = X_2\boldsymbol{I} + Y_2\boldsymbol{J}.$$

Положим

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{CA}_1 = \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{CA}_2 = \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{r}_2. \tag{14}$$

Воспользовавшись равенствами (14) и (13), из уравнения (5) получим соотношение:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}) - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}), \tag{15}$$

где

$$\rho_k = |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}| = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2 + z^2}, \quad k = 1, 2.$$

Уравнение (15) и есть *векторное* дифференциальное уравнение движения спутника P во вращающейся системе координат. Другую запись того же уравнения получим, если воспользуемся равенством (12)

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 2\omega(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j}) + \omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}). \tag{16}$$

Последнее векторное уравнение равносильно системе из трех скалярных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x + \frac{fm_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{fm_2}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{fm_1}{\rho_1^3}y - \frac{fm_2}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{fm_1}{\rho_1^3}z - \frac{fm_2}{\rho_2^3}z. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

При конкретных числовых значениях величин m_1, m_2 и для небольших промежутков времени можно решить эту

систему приближенно, если привлечь хорошо разработанные в современной математике методы численного интегрирования дифференциальных уравнений и воспользоваться быстродействующими вычислительными машинами. Таким образом, можно предвычислить траекторию полета космического аппарата на тех участках, где необходимо учитывать его тяготение к *двум* небесным телам (например, вблизи границы сферы действия одного из этих тел).

4. В теоретических исследованиях для упрощения выкладок часто пользуются следующей системой *канонических* единиц: за единицу массы принимают сумму масс двух притягивающих центров ($m_1 + m_2 = 1$); за единицу расстояния — расстояние между притягивающими центрами A_1A_2 ($a = A_1A_2 = 1$); за единицу времени — то время, которое потребуется точке A_1 для описания вокруг A_2 дуги в 1 радиан (в инерциальной системе отсчета).

В этой системе единиц период T обращения точки A_1 вокруг A_2 составляет 2π единиц. Но по формуле (2.9.10) $a^3/T^2 = f(m_1 + m_2)/4\pi^2$. При $a = 1$, $T = 2\pi$, $m_1 + m_2 = 1$ получим, что $f = 1$. Итак, в *канонической системе единиц* $f = 1$. В канонической системе единиц можно в уравнениях (17) m_1 заменить на μ, m_2 — на $1 - \mu$, f — на 1, ω — на 1:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}z. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Полагая в уравнениях (17), (18) $z \equiv 0$, получим дифференциальные уравнения движения спутника в ограниченной *плоской* круговой задаче трех тел. Так как при $z \equiv 0$ третье из уравнений (18) превращается в тождество $0 \equiv 0$, то рассматриваемая плоская задача описывается системой дифференциальных уравнений *четвертого* порядка относительно двух вещественных функций $x(t)$ и $y(t)$.

Уравнение (15), характеризующее движение спутника (P, m) во вращающейся системе отсчета $Cxyz$, отличается

от уравнения движения спутника в инерциальной системе отсчета (5) только новыми слагаемыми $-2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})$ и $-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ в правой части уравнения (15). Каков же их физический смысл?

Появление этих слагаемых связано с неинерциальностью системы отсчета $Cxyz$. Величина $\boldsymbol{a}_{\text{ц}}\equiv-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ [или, что то же, $\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$] — это центробежное ускорение. Оно имеет компоненты $\omega^2 x$ и $\omega^2 y$. В случае плоской ограниченной задачи трех тел это ускорение направлено так же, как и радиус-вектор спутника $\overrightarrow{CP}$. Второе слагаемое $\boldsymbol{a}_{\text{к}}\equiv-2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}})$ или, что то же, $2\omega(\dot{y}\boldsymbol{i}-\dot{x}\boldsymbol{j})$, — взятое со знаком «минус» *кориолисово* ускорение. Его компоненеты равны $2\omega\dot{y}$ и $-2\omega\dot{x}$. Оно направлено, очевидно, перпендикулярно к вектору скорости спутника. В случае *плоской* ограниченной задачи трех тел вектор кориолисова ускорения лежит в плоскости орбиты спутника.

Движение спутника относительно *инерциальной* системы отсчета $CXYZ$ будем кратко называть *абсолютным* движением, а его движение относительно *вращающейся* системы отсчета $Cxyz$ назовем для краткости *относительным* движением. Аналогичным образом будем различать абсолютную и относительную скорости и абсолютное и относительное ускорения спутника.

Заметим еще, что уравнения (17) можно записать в виде, более удобном для запоминания. Для этой цели введем в рассмотрение функцию

$$U=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+f\frac{m_1}{\rho_1}+f\frac{m_2}{\rho_2}\,. \tag{19}$$

Легко проверить, что систему (17) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=2\omega\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial x},\\ \ddot{y}&=-2\omega\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial U}{\partial z}\,.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

5. Интеграл Якоби. Умножая первое из уравнений (20) на $2\dot{x}$, второе — на $2\dot{y}$, а третье — на $2\dot{z}$ и складывая полученные произведения, найдем:

$$2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Обозначим через v скорость спутника относительно вращающейся системы отсчета $Cxyz$. Тогда

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = v^2$$

и

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Отсюда

$$v^2 = 2U - c, \tag{21}$$

где c — константа.

Равенство (21) является первым интегралом для системы (20). Он носит название *интеграла Якоби*. Этот интеграл можно записать и в виде

$$v^2 = \omega^2(x^2+y^2) + 2f\frac{m_1}{\rho_1} + 2f\frac{m_2}{\rho_2} - c. \tag{22}$$

Если в какой-то момент времени известны относительная скорость спутника и его положение, а следовательно, его расстояния ρ_1 и ρ_2 от обоих притягивающих центров, то из интеграла Якоби можно найти константу c. Если затем будет задано положение спутника в какой-либо другой момент времени, то с помощью интеграла Якоби можно будет и для этого момента времени вычислить относительную скорость спутника (но только по абсолютной величине, а не по направлению). При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (17) пользуются обычно интегралом Якоби в качестве эффективного средства для контроля правильности вычислений.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

1. Дифференциальные уравнения движения «спутника» в инерциальной и вращающейся системах отсчета можно вывести, привлекая простейшие сведения о комплексных переменных. Пусть движение пассивно гравитирующего спутника (P, m) происходит в той же плоскости, в которой движутся оба притягивающих центра (A_1, m_1) и (A_2, m_2) (рис. 7.2). Выберем в этой плоскости инерциальную прямоугольную систему координат CXY с началом в барицентре C точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2); ось CX расположим так, чтобы она совпала с осью CA_1 в момент времени $t = 0$. Плоскость CXY примем за плоскость комплексного переменного Z. Пусть в произвольный момент времени t точки A_1, A_2, P имели соответственно комплексные координаты Z_1, Z_2, Z.

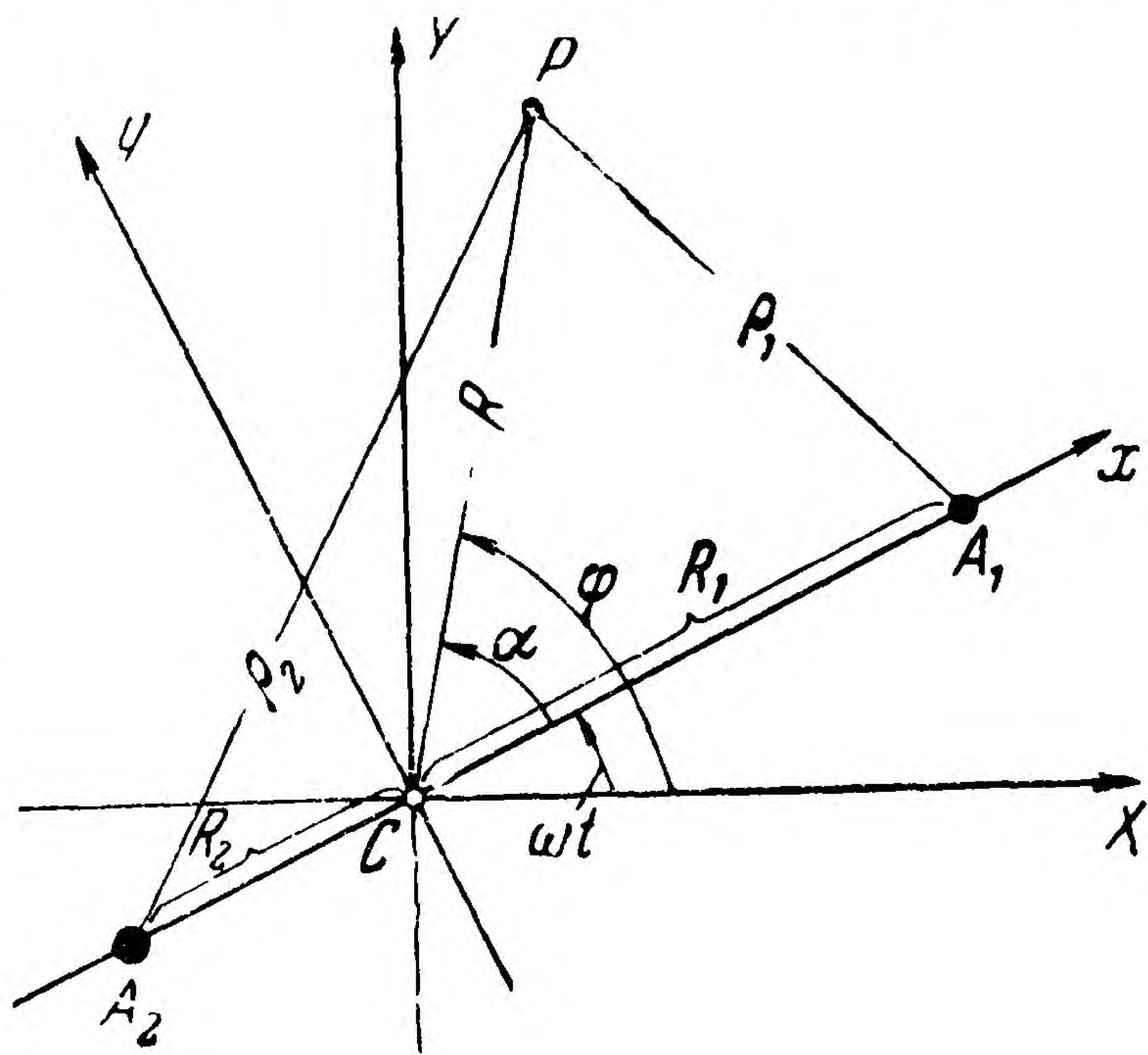


Рис. 7.2.

Тогда

$$CA_1 = |Z_1| = R_1, CA_2 = |Z_2| = R_2, CP = |Z| = R, A_2A_1 = a;$$

$$A_1P = |Z_1 - Z| = \rho_1, \quad A_2P = |Z_2 - Z| = \rho_2, \tag{1}$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Заметим попутно, что $m_1R_1 = m_2R_2$, $R_1 + R_2 = a$, откуда следует, что

$$R_1 = \mu a, \quad R_2 = (1 - \mu) a.$$

Силы, с которыми точка (P, m) притягивается к точкам (A_1, m_1) и (A_2, m_2), могут быть записаны в комплексной форме следующим образом:

$$fm_1m\frac{Z_1 - Z}{\rho_1^3} \text{ и } fm_2m\frac{Z_2 - Z}{\rho_2^3}.$$

Пользуясь вторым законом Ньютона, найдем:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = f\frac{m_1}{\rho_1^3}(Z_1 - Z) + f\frac{m_2}{\rho_2^3}(Z_2 - Z). \qquad (3)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения спутника в инерциальной системе отсчета CXY.

2. Перейдем теперь к выводу уравнения движения спутника во *вращающейся* системе отсчета.

Пусть точки A_1 и A_2 вращаются вокруг точки C с угловой скоростью ω. Заставим прямоугольную систему координат Cxy вращаться вокруг точки C с той же угловой скоростью ω, причем ось Cx направим вдоль прямой A_2A_1.

Обозначим комплексные координаты точек A_1, A_2, P относительно вращающейся системы отсчета Cxy через z_1, z_2 и z; пусть $\measuredangle A_1CP = \alpha$, $CP = R$ (R и α — функции от t). Ясно, что

$$z_1 = R_1, \quad z_2 = -R_2, \quad z = Re^{i\alpha}. \qquad (4)$$

Числа Z_1, Z_2 и Z (комплексные координаты точек A_1, A_2, P в *инерциальной* системе отсчета $CXYZ$) можно также записать в показательной форме:

$$Z_1 = R_1e^{i\omega t}, \quad Z_2 = R_2e^{i(\omega t+\pi)} = -R_2e^{i\omega t}, \quad Z = Re^{i(\alpha+\omega t)}. \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует, что

$$Z_1 = z_1e^{i\omega t}, \quad Z_2 = z_2e^{i\omega t}, \quad Z = ze^{i\omega t}. \qquad (6)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), после упрощений получим искомое уравнение движения спутника во вращающейся системе отсчета. Проделаем соответствующие выкладки:

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z} = (\dot{z} + i\omega z)e^{i\omega t}, \quad \ddot{Z} = (\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z)\,e^{i\omega t}, \\ Z_1 - Z = (z_1 - z)\,e^{i\omega t}, \quad Z_2 - Z = (z_2 - z)\,e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

После подстановки этих выражений в (3) и сокращения на $e^{i\omega t}$ найдем:

$$\ddot{z} = -2i\omega\dot{z} + \omega^2 z + f\frac{m_1}{\rho_1^3}(z_1 - z) + f\frac{m_2}{\rho_2^3}(z_2 - z). \qquad (8)$$

Это дифференциальное уравнение *второго* порядка относительно комплексной координаты z и есть искомое дифференциальное уравнение движения спутника во вращающейся системе отсчета.

Величина $a_ц = \omega^2 z$, входящая в правую часть уравнения (8), — это *центробежное* ускорение (оно одинаково направлено с вектором z). А величина $a_к = -2i\omega\dot{z}$ — это *ускорение Кориолиса*, взятое со знаком «минус». Вектор $\boldsymbol{a}_k$ образуется из вектора скорости $\dot{z}$, если последний умножить на 2ω («растянуть» вектор $\dot{z}$), а затем повернуть на 90° по часовой стрелке в плоскости движения точки P.

Если ввести вспомогательную функцию U по формуле

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 |z|^2 + f\frac{m_1}{\rho_1} + f\frac{m_2}{\rho_2}, \tag{9}$$

то легко проверить, что уравнение (8) записывается в более компактном виде

$$\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10}$$

Умножая (10) почленно на

$$\dot{\bar{z}} = \dot{x} - i\dot{y},$$

найдем:

$$\ddot{z}\dot{\bar{z}} + 2i\omega|\dot{z}|^2 = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + i\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{x}\right).$$

Приравняем вещественные части обеих частей последнего равенства:

$$\mathrm{Re}\,(\ddot{z}\dot{\bar{z}}) = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y},$$

то есть

$$\frac{1}{2}(\ddot{z}\dot{\bar{z}} + \dot{z}\ddot{\bar{z}}) = \frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\dot{z}\cdot\dot{\bar{z}}) = 2\frac{dU}{dt},$$

откуда

$$|\dot{z}|^2 = 2U - c. \tag{11}$$

Это и есть интеграл Якоби в комплексной форме.

Заметим, что в канонических единицах уравнения (8) — (11) принимают следующий вид:

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(-\mu-z), \qquad (12)$$

$$U = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}, \qquad (13)$$

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad (14)$$

$$|\dot{z}|^2 = 2U - c. \qquad (15)$$

3. Интеграл Якоби в инерциальной системе отсчета. Перейдем в интеграле Якоби (11) от переменного z обратно к переменному Z.

Пусть $\dot{Z}$ — скорость спутника относительно системы отсчета CXY, а $V = |\dot{Z}|$.

Так как $z = Ze^{-i\omega t}$, то

$$\dot{z} = (\dot{Z} - i\omega Z)e^{i\omega t},$$

$$|\dot{z}|^2 = |\dot{Z} - i\omega Z|^2.$$

Воспользуемся легко проверяемым тождеством, верным для любых *комплексных* чисел α и β:

$$|\alpha - \beta i|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,(\alpha\cdot\bar{\beta}).$$

Тогда получим:

$$|\dot{z}|^2 = |\dot{Z}|^2 + \omega^2|Z|^2 - 2\omega\,\mathrm{Im}\,(\dot{Z}\cdot\bar{Z}).$$

Обозначим через φ угол между осью CX и радиусом-вектором $\overrightarrow{CP}$. Мы можем записать Z в показательной форме: $Z = Re^{i\varphi}$. Отсюда

$$\dot{Z}\cdot\bar{Z} = (\dot{R} + iR\dot{\varphi})R,$$

$$\mathrm{Im}\,(\dot{Z}\bar{Z}) = R^2\dot{\varphi}.$$

Поэтому

$$|\dot{Z}|^2 = V^2 + \omega^2R^2 - 2\omega R^2\dot{\varphi}.$$

Интеграл Якоби (11) преобразуется теперь к следующему виду:

$$V^2 - 2\omega R^2\dot{\varphi} = \frac{2fm_1}{\rho_1} + \frac{2fm_2}{\rho_2} - c.$$

Умножая это равенство почленно на $\frac{1}{2}m$ (m — масса спутника), получим другую запись интеграла Якоби:

$$\frac{1}{2}mV^2 - m\left[\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right] - \omega mR^2\dot{\varphi} = -C. \qquad (16)$$

Выясним физический смысл отдельных составляющих этого интеграла. Величина $\frac{1}{2}mV^2$ — это кинетическая энергия спутника. Величина $m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$ — это работа, которую необходимо затратить, чтобы, преодолевая притяжение притягивающих центров, удалить спутник в бесконечность. Иначе говоря, $-m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$ — это потенциальная энергия спутника. Величина

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - m\left(\frac{fm_1}{\rho_1} + \frac{fm_2}{\rho_2}\right)$$

— это полная энергия спутника.

Выражение $I = mR^2\dot{\varphi}$ — это кинетический момент спутника. Если учесть, что $\frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}$ — это секториальная скорость dS/dt спутника (относительно барицентра C), то кинетический момент можно представить в виде

$$I = 2m\frac{dS}{dt}.$$

В ограниченной задаче *двух* тел, как мы видели в § 3 главы II, полная энергия спутника остается постоянной в течение всего времени его движения. То же имеет место и для его секториальной скорости, а значит, и для его кинетического момента. А в ограниченной задаче *трех* тел меняется и энергия (E) спутника, и его кинетический

момент (I). Но из (16) видно, что неизменной остается разность

$$E - \omega I = -C = \text{const}. \tag{17}$$

4. Преобразование Тиле. Правая часть дифференциального уравнения (12) возрастает неограниченно, если спутник в своем движении неограниченно приближается к одному из притягивающих центров. Это обстоятельство, затрудняющее численное интегрирование уравнения движения спутника, можно обойти, если воспользоваться преобразованием, предложенным датским математиком и астрономом Т. Тиле.

Прежде чем применить это преобразование, совершим во *вращающейся* плоскости Cxy перенос начала координат в середину O отрезка A_2A_1, но сохраним старое направление осей. Таким образом получим новую систему координат $O\xi\eta$, причем $O\xi \| Cx$, $O\eta \| Cy$. От переменного $z = x + iy$ перейдем к промежуточному переменному $\zeta = \xi + i\eta$ по формуле

$$\zeta = \delta + 2z,$$

где

$$\delta = 1 - 2\mu. \tag{18}$$

Можно проверить, что дифференциальное уравнение (12) и интеграл Якоби (15) примут вид

$$\ddot{\zeta} = -2i\dot{\zeta} + \left(\frac{\partial U'}{\partial \xi} + i\frac{\partial U'}{\partial \eta}\right), \tag{19}$$

где

$$U' = \frac{1}{2}|\zeta|^2 - \delta\xi + \frac{8\mu}{\rho_1} + \frac{8(1-\mu)}{\rho_2}, \tag{20}$$

и

$$|\dot{\zeta}|^2 = 2U' + h'. \tag{21}$$

К уравнению движения спутника в виде (19) мы и применим преобразование Тиле:

$$\zeta = \cos w, \quad dt = \rho_1\rho_2 d\tau. \tag{22}$$

Здесь $w = u + iv$ — комплексное переменное.

В чем смысл преобразования Ти́ле? От времени t мы переходим к другой переменной τ, так что

$$d\tau = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\,dt. \qquad (23)$$

Это значит, что при подходе спутника к одному из притягивающих центров (то есть когда ρ_1 или ρ_2 мало) мы вместо каждого малого промежутка времени dt получаем во много раз больший промежуток $d\tau$ для введенной нами величины τ. Эта величина τ заменит в уравнении спутника (19) время t. Иначе говоря, величина τ выполняет такую же роль, как время t в уравнении (19); τ — это новое, вспомогательное «время», которое, как видно из (23), как бы растягивается, когда спутник подходит к одному из притягивающих центров. Быстрое движение вблизи одного из притягивающих центров рассматривается через «лупу времени», как в замедленном кинофильме.

Обратимся теперь к первой формуле преобразования Ти́ле (22). Известно, что вблизи притягивающего центра орбита спутника мало отличается от конического сечения (эллипса, гиперболы и т. п.). С другой стороны, можно показать, что при отображении $\zeta = \cos w$ прямым плоскости комплексного переменного w, параллельным осям координат, соответствуют эллипсы и гиперболы (быть может, вырождающиеся) плоскости переменного ζ. Таким образом, — хотя бы для некоторых из возможных траекторий — дуги траектории спутника вблизи притягивающего центра будут изображаться в плоскости w в виде линий, близких к прямолинейным отрезкам. Правая часть уравнения (12) разрывна в тех точках плоскости переменного ζ, которые соответствуют притягивающим центрам A_1 и A_2 (то есть для которых $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$). Аналогичным недостатком обладает, разумеется, и уравнение (19). Но можно показать, что после перехода к переменным Ти́ле w ($w = u + iv$) уравнение (19) переходит в уравнение, у которого правая часть в точках, соответствующих притягивающим центрам, уже является непрерывной и, более того, регулярной (аналитической) функцией.

Переменные Ти́ле применяются для расчета траекторий космических аппаратов. Так, например, в 1953—1955 годах

в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР было рассчитано в переменных Ти́ле около тысячи различных траекторий возможного полета космического аппарата под действием Земли и Луны [6.1].

§ 4. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

1. В ближайших двух параграфах мы сделаем некоторые выводы из уравнения (7.3.8) для ограниченной плоской круговой задачи трех тел. Для простоты будем полагать, что нами выбрана *каноническая* система единиц, так что $\omega = 1$, $a = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $f = 1$, $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$. Предположим для определенности, что

$$m_1 < m_2.$$

Тогда

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

Уравнение (7.3.8) движения спутника относительно вращающейся плоскости Cxy имеет в канонических единицах вид

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(z_1 - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(z_2 - z). \tag{1}$$

Пусть спутник в какой-то момент времени $t = t_0$ находится в точке M вращающейся плоскости Cxy и имеет нулевую относительную скорость (то есть нулевую скорость относительно вращающейся системы координат). Останется ли он в этой точке вращающейся плоскости?

Рассмотрим сначала два конкретных случая.

а) Точка M — это барицентр C двух притягивающих центров (A_1, μ) и $(A_2, 1-\mu)$. В этом случае при $t = t_0$ $z = 0$ и $\dot{z} = 0$. Поэтому ускорение $\ddot{z}$ при $t = t_0$ согласно формуле (1) равно

$$\ddot{z} = \frac{\mu}{\rho_1^3} z_1 + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} z_2.$$

Но в данном случае

$$\rho_1 = r_1,\ \rho_2 = r_2,\ z_1 = r_1 = 1 - \mu > \frac{1}{2},$$

$$z_2 = -r_2 = -\mu,\ \mu < \frac{1}{2}.$$

Поэтому при $t = t_0$

$$\ddot{z} = \frac{\mu(1-\mu)}{(1-\mu)^3} - \frac{(1-\mu)\mu}{\mu^3} = \frac{1}{\mu^2(1-\mu)^2}[\mu^3 - (1-\mu)^3] < 0.$$

Итак, имея нулевую скорость в точке C, спутник будет иметь отличное от нуля, а именно отрицательное, ускорение. Значит, он будет падать на бо́льшую звезду A_2.

б) M — точка равных притяжений двух притягивающих центров (A_1, μ) и $(A_2, 1-\mu)$, лежащая на отрезке A_1A_2. В данном случае $\mu/\rho_1^2 = (1-\mu)/\rho_2^2$, откуда

$$\mu \frac{z_1 - z}{\rho_1^3} = (1-\mu)\frac{z - z_2}{\rho_2^3},$$

ибо $z_1 - z = \rho_1$, $z - z_2 = \rho_2$.

Поэтому [см. (1)] в момент $t = t_0$ $\ddot{z} = z$. Но точка M, как точка равных притяжений, ближе к меньшей звезде A_1, а барицентр C ближе к большей звезде A_2, так что M лежит на луче CA_1. Следовательно, $z > 0$, и поэтому $\ddot{z} > 0$ (при $t = t_0$): спутник будет двигаться по направлению к меньшей звезде A_1.

2. Пусть теперь M — *произвольная* точка вращающейся плоскости; пусть в момент времени t_0 спутник P находится в точке M и имеет нулевую относительную скорость.

Из-за тяготения к притягивающим центрам A_1 и A_2 спутник P, вообще говоря, не удержится в точке M и начнет как-то перемещаться по вращающейся плоскости. Например, он может в течение какого-то промежутка времени приближаться к точке A_1 и удаляться от точки A_2.

Возникает вопрос: нет ли во вращающейся плоскости таких особых, «привилегированных» точек, в которых спутник мог бы находиться в покое (относительно вращающейся плоскости) неограниченно долго?

Оказывается, такие точки существуют.

Такая точка M вращающейся плоскости, в которой спутник будет находиться неограниченно долго, если его начальная относительная скорость равна нулю, называется *точкой либрации*, или *точкой относительного равновесия*.

Итак, если спутник придет в какую-то точку M с нулевой относительной скоростью, то он все равно не

удержится в этой точке, его «вытянут» из этой точки притягивающие его звезды. Исключение составит лишь тот случай, когда точка M окажется точкой либрации.

3. Сколько же существует точек либрации? Как они расположены на плоскости? И как их можно найти?

Так как в точке либрации относительная скорость спутника должна оставаться тождественно равной нулю ($\dot{z} = 0$), то и относительное ускорение $\ddot{z} = 0$. Уравнение (1) в точке либрации z принимает вид

$$z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1 - \mu - z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(-\mu - z) = 0 \qquad (2)$$

или

$$\left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1\right) z = \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right). \qquad (3)$$

Имеем два случая:

1) $\operatorname{Im} z \neq 0$. Уравнение (3) принимает в этом случае вид

$$\alpha \cdot z = \beta, \qquad (4)$$

где α и β — вещественные числа. Число z, для которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, удовлетворит этому условию тогда и только тогда, когда одновременно $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Действительно, если бы $\alpha \neq 0$, то левая часть (4) была бы мнимым числом, а правая — вещественным, что невозможно; а если $\alpha = 0$, то должно быть и $\beta = 0$. В нашем случае получим

$$\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 = 0 \qquad (5)$$

и

$$\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right) = 0. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что $\rho_2 = \rho_1$, а из (5) получим, что $\rho_1 = 1$, так что $A_1M = A_2M = A_1A_2 = 1$.

Итак, точкой либрации является вершина M правильного треугольника, построенного на отрезке A_1A_2 как на основании. Имеются, очевидно, две такие точки (рис. 7.3, точки L_4 и L_5). Их называют *треугольными* точками либрации.

2) $\operatorname{Im} z = 0$. Мы теперь ищем точки либрации, лежащие на прямой A_1A_2. Задача сводится к разысканию *вещественных* корней уравнения (2). Рассмотрим отдельно три интервала прямой A_1A_2:

$$\text{а) } (z_2, z_1), \text{ б) } (z_1, +\infty), \text{ в) } (-\infty, z_2).$$

Будем сначала искать точку либрации L_1 на отрезке (z_2, z_1).

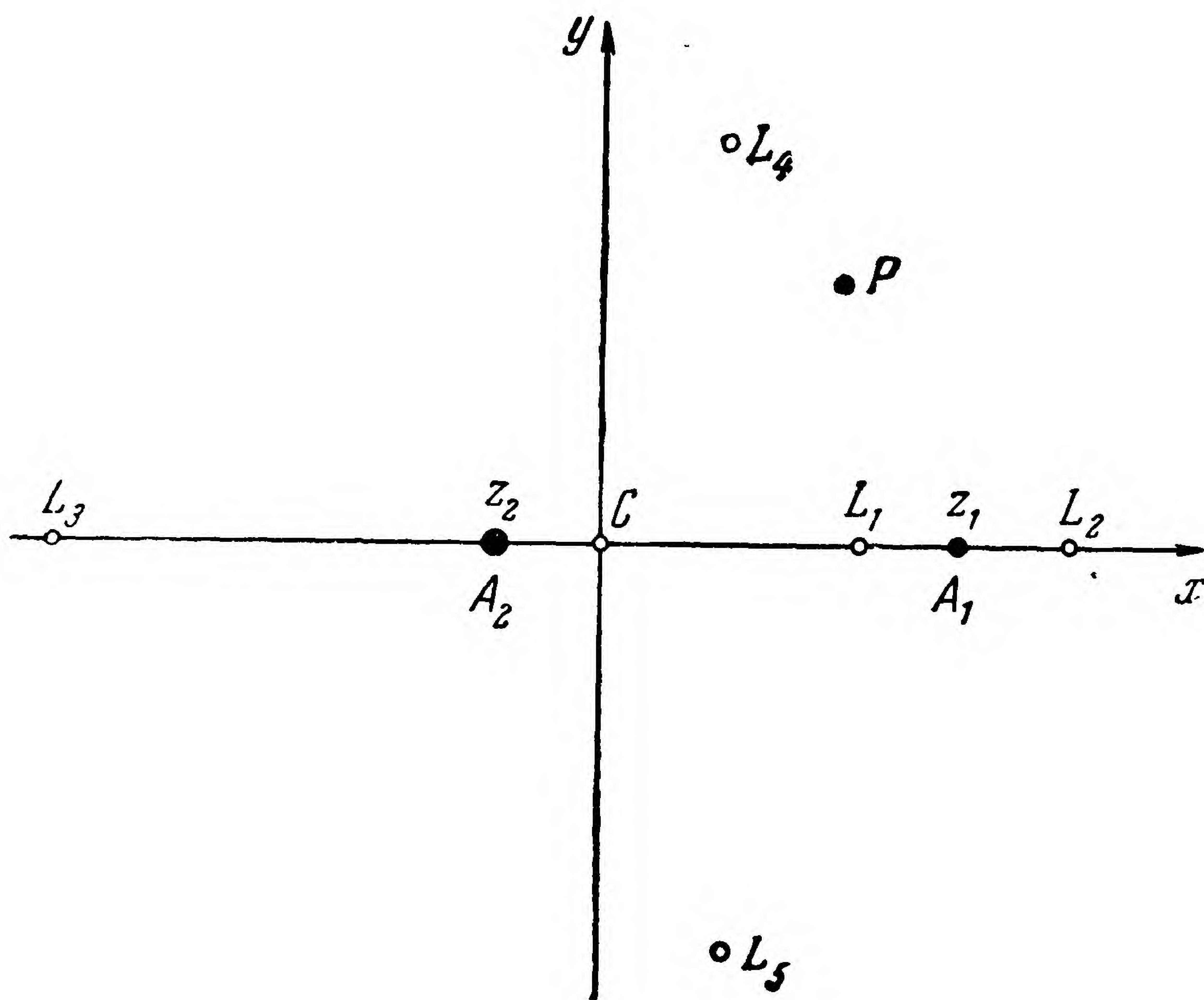


Рис. 7.3.

Выразим в уравнении (2) все неизвестные через ρ_1 ($\rho_1 = L_1A_1$):

$$\rho_2 = 1 - \rho_1, \quad z = 1 - \mu - \rho_1.$$

Получим

$$1 - \mu - \rho_1 + \frac{\mu}{\rho_1^2} - \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^2} = 0, \tag{7}$$

то есть

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu(\rho_1^2 - 2\rho_1 + 1) = 0. \tag{7'}$$

Таким образом, задача сводится к решению некоторого уравнения пятой степени относительно ρ_1. Можно показать, что это уравнение имеет *только один вещественный*

корень. При малых μ этот корень удобно вычислить путем разложения его в степенной ряд по степеням $(\mu/3)^{1/3}$. Можно показать, что

$$\rho_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots \tag{8}$$

(где под $(\mu/3)^{1/3}$ следует понимать *вещественное* значение корня $\sqrt[3]{\mu/3}$).

Аналогичным образом можно показать, что существует только одна точка либрации L_2 на интервале (z_1, ∞) и одна L_3 на интервале $(-\infty, z_2)$. При малых μ удобно найти положение этих точек с помощью разложений величин ρ_1 или ρ_2 в степенные ряды.

Для L_2

$$\rho_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right) + \ldots \tag{9}$$

Для L_3

$$\rho_2 = 1 - \frac{7}{12}\mu - \frac{23\cdot 7^2}{12^4}\mu^3 - \ldots \tag{10}$$

Отсюда видно, что при малом μ, то есть при $m_1 \ll m_2$, точка либрации L_1 расположена ближе к меньшей звезде, чем L_2, примерно на $\frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^3$ канонических единиц и что расстояние точки L_3 от большей звезды меньше расстояния между притягивающими центрами A_2 и A_3 примерно на $\frac{7}{12}\mu$, так что при малых μ L_3 и A_1 примерно симметричны относительно A_2. Точки L_1, L_2, L_3 называют *прямолинейными*, или *коллинеарными*, точками либрации.

На рис. 7.4 изображены все пять точек либрации. Неколлинеарные точки либрации L_4 и L_5 лежат на окружности с центром в звезде A_2, проходящей через другую звезду A_1. Через L_4 мы обозначаем ту из этих двух точек либрации, которая находится на 60° впереди *) звезды A_1, через L_5 —

*) По ходу движения точки A_1 вокруг A_2.

ту, которая находится на 60° позади этой звезды. Три точки L_5, A_1, L_4 представляют собой последовательные вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность с центром A_2 и радиусом A_2A_1.

Вернемся к уравнению (7′). Его можно записать и так:

$$\rho_1^3\,[(3-2\mu)-\rho_1(3-\mu)+\rho_1^2]=\mu\,(1-\rho_1)^2,$$

откуда

$$\rho_1=\left\{\frac{\mu\,(1-\rho_1)^2}{[(3-2\mu)-\rho_1(3-\mu)+\rho_1^2]}\right\}^{1/3}. \qquad (11)$$

Вещественный корень ρ_1 этого уравнения иногда [7.4] находят методом неподвижной точки (см. § 3 главы III). Если ради краткости обозначить правую часть формулы (11) через $\varphi(\rho_1)$, то последовательные приближения $\rho_1^{(n)}$ к искомому корню ρ_1 можно вычислять по формуле

$$\rho^{(n+1)}=\varphi\,(\rho_1^{(n)}),$$
$$n=0,\,1,\,2,\,\ldots;$$

нулевое приближение $\rho_1^{(0)}$ можно принять, например, равным 0. Аналогично можно поступить и применительно к точкам либрации L_2 и L_3.

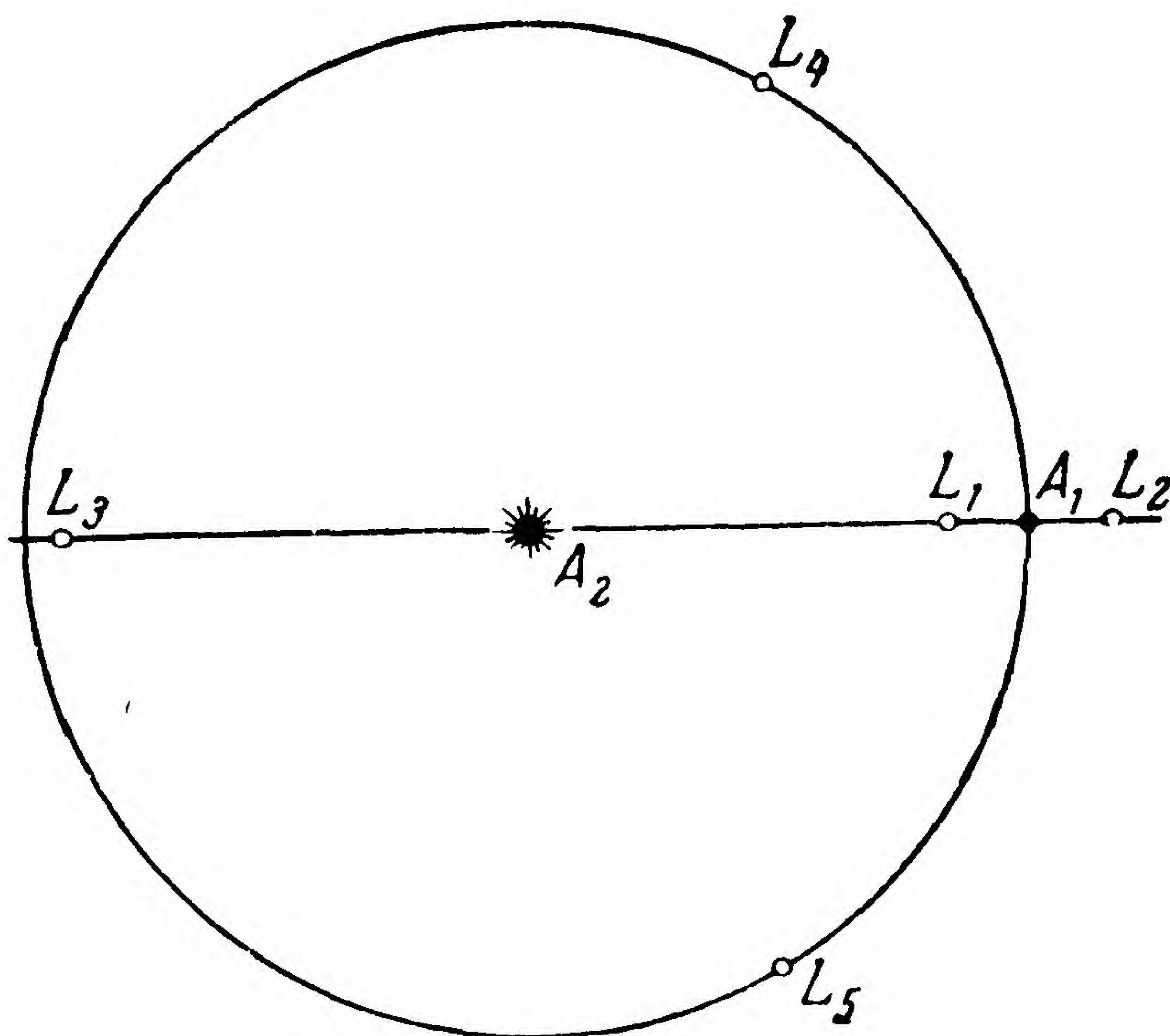


Рис. 7.4.

П р и м е р. Определим положение точек либрации для системы Земля — Луна, принимая, что Луна движется вокруг Земли по окружности радиуса $a=384\,400$ *км*. В канонических единицах измерения $a=1$, $\mu=1:82{,}35$.

По формулам (8), (9), (10) для L_1 находим $\rho_1\approx\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\approx 0{,}15$ канонических единиц, то есть $\rho_1\approx 58\,000$ *км*; для L_2: $\rho_1\approx\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\approx 0{,}17$ канонических единиц, то есть $\rho_1\approx 65\,000$ *км*; для L_3

получим $\rho_2 \approx 1 - \frac{7}{12}\mu \approx 0,99$ канонических единиц, то есть $\rho_2 \approx 380\,600$ *км*.

4. Решением уравнения (1) является функция вида

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

которая, будучи подставленной в (1), обращает это уравнение в тождество. Геометрический смысл решения — это возможная траектория спутника. Найденные пять точек либрации — это пять частных решений уравнения (1) (точку, в которой все время находится спутник, также следует рассматривать как траекторию спутника).

Подробный анализ показывает, что треугольные точки либрации L_4 и L_5 при достаточно малых μ ($\mu < 0,038\ldots$) являются *устойчивыми* решениями уравнения (1). Это значит, что если спутник в начальный момент $t = t_0$ расположен не в самой точке L_4 (или L_5), а на некотором достаточно малом расстоянии от нее и имеет достаточно малую относительную скорость, то с течением времени спутник останется внутри малой окрестности точки L_4 (или L_5).

Наоборот, точки L_1, L_2, L_3 являются неустойчивыми решениями. Это значит, что при любом сколь угодно малом смещении спутника от такой точки либрации спутник может удалиться на значительное расстояние от этой точки.

Устойчивость точек либрации L_4 и L_5 находит интересное воплощение в солнечной системе. Пусть L_4 и L_5 — точки либрации для системы двух тел Солнце — Юпитер. В силу ранее сказанного всякое малое небесное тело, оказавшееся в какой-то момент времени достаточно близко от одной из этих точек и имеющее достаточно малую относительную скорость, должно остаться вблизи этой точки либрации неограниченно долго.

Именно так, по-видимому, обстоит дело с астероидами так называемой Троянской группы, которые концентрируются вблизи треугольных точек либрации системы Солнце — Юпитер.

Естественно полагать, что и вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна также скапливаются какие-то космические тела. Любопытно, что это предположение подтвердилось: в марте—апреле 1961 года астроном Краковской обсерватории К. Кордилевский после десятилетних

поисков обнаружил два космических «облака», по-видимому, состоящих из метеорной пыли, в районе точки либрации L_4, а через некоторое время подобные «облака» были им найдены в районе точки либрации L_5 [7.5]. Возможно, что эти точки либрации будут в дальнейшем использованы для помещения в них «космического буя» — космической обсерватории. Достоинством такой обсерватории будет неизменность расстояний до Земли и Луны и вследствие этого — простота пересчета результатов наблюдений, полученных в такой обсерватории к виду, удобному для наблюдателя с Земли. Правда, возмущающее действие Солнца может оказать значительное влияние на положение такого «буя».

§ 5. ЛИНИИ ХИЛЛА

Интеграл Якоби позволяет выделить такую часть плоскости, куда непритягивающий спутник системы двух звезд в течение всего своего движения заведомо никогда попасть не сможет. На это впервые обратил внимание американский астроном Дж. В. Хилл в своих исследованиях движения Луны (1877 год).

В канонических единицах измерения интеграл Якоби (7.2.22) записывается в виде

$$v^2 = 2U - c, \tag{1}$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}. \tag{2}$$

Допустим, что в момент времени t_0 спутник находился на расстояниях ρ_{10} и ρ_{20} от звезд A_1 и A_2 и имел относительную скорость v_0. Пусть ρ_0 — расстояние спутника от барицентра C. Постоянная c интеграла Якоби выражается через начальные данные ρ_{10}, ρ_{20}, ρ_0 при помощи формул

$$c = 2U_0 - v_0^2, \tag{3}$$

где

$$2U_0 = \rho_0^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_{10}} + \frac{1-\mu}{\rho_{20}}\right). \tag{4}$$

В силу интеграла Якоби в любой момент времени координаты и скорость спутника P удовлетворяют условию

$$v^2 = 2U - c, \tag{5}$$

где

$$2U = r^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right). \tag{6}$$

Очевидно, в любой точке, куда спутник может попасть, имеет место неравенство $v^2 \geqslant 0$, то есть $2U - c \geqslant 0$. А область, в которой $2U - c < 0$,— это область, где движение заведомо невозможно.

Линия

$$2U - c = 0 \tag{7}$$

отделяет множество тех точек вращающейся плоскости, где движение спутника, вообще говоря, возможно, от множества точек, где движение спутника наверняка невозможно. Такая линия называется *линией Хилла*, или *линией нулевой относительной скорости* (как видно из (3), в каждой точке такой линии должно быть $v = 0$). Уравнение линии Хилла (7) можно переписать и так:

$$x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c. \tag{8}$$

Меняя c, мы получим семейство линий Хилла.

Сначала представим себе линию Хилла при большом c. Уравнение (8) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = c + \varepsilon, \tag{9}$$

где ε будет мало, если ρ_1 и ρ_2 велики. Если бы ε было равно 0, то уравнение (9) представляло бы собой уравнение окружности с центром C радиуса $\sqrt{c}$. Если же $\varepsilon \neq 0$, но мало по сравнению с c, то линия (9) близка к окружности:

$$x^2 + y^2 = c. \tag{10}$$

Таким образом, при большом c и больших ρ_1 и ρ_2 уравнению (8) удовлетворяют координаты точек, лежащих на кривой, близкой к окружности (10). При малых ρ_1 и ρ_2 (то есть при

малых x и y) уравнение (8) перепишем в виде

$$\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{1-\mu}{\rho_2}=\frac{c}{2}-\alpha, \qquad (11)$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2}(x^2+y^2). \qquad (12)$$

Отвлечемся временно от равенства (12).

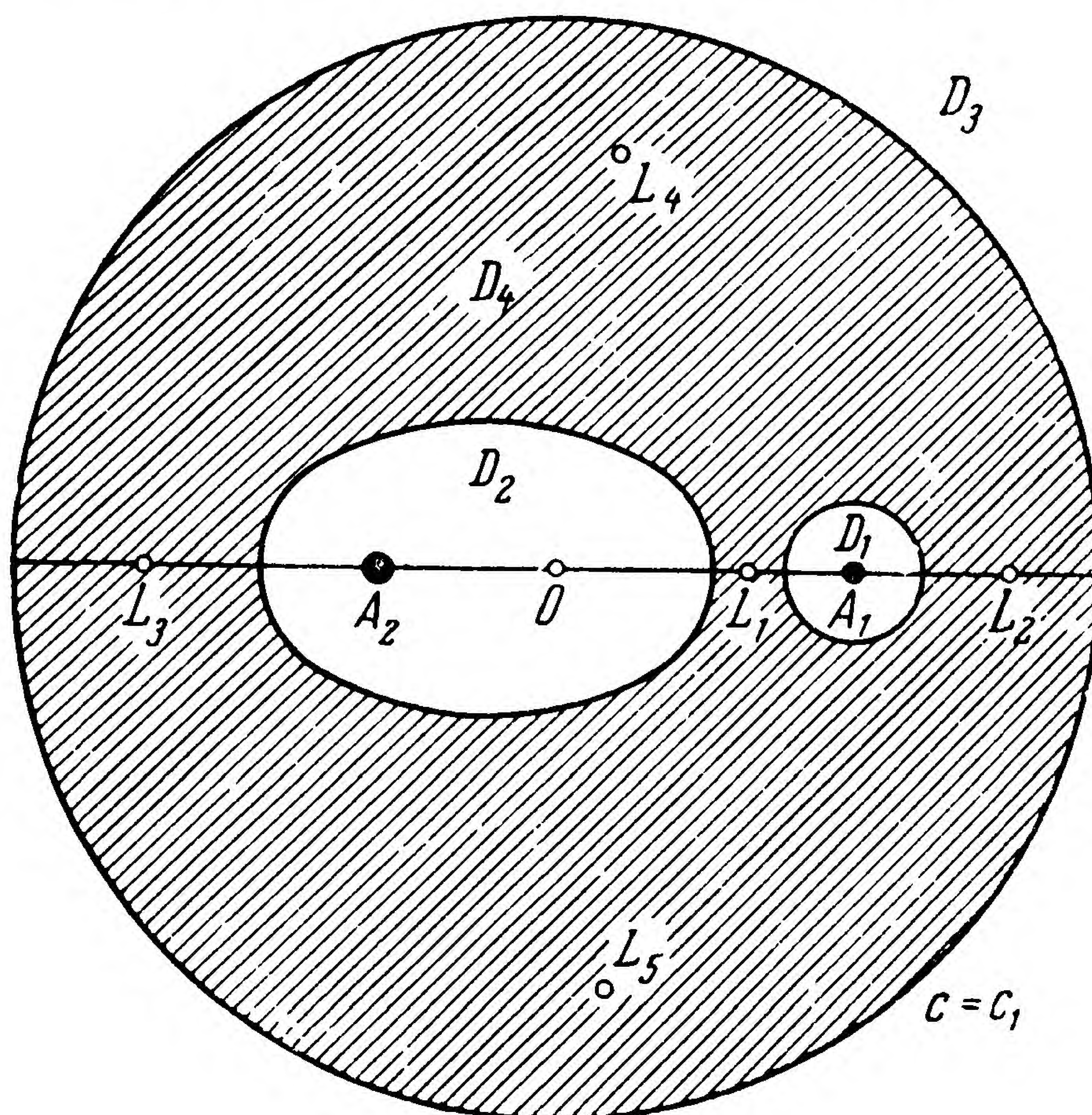


Рис. 7.5.

Равенство (11) при $\alpha=0$ представляет собой уравнение хорошо изученной линии

$$\frac{\mu}{\rho_1}+\frac{1-\mu}{\rho_2}=\frac{c}{2}, \qquad (13)$$

которую называют *овалом*. При достаточно больших $c=c$ эта линия распадается на два замкнутых контура, описанных вокруг каждой из точек A_2 и A_1 (рис. 7.5); при меньших $c=c_3<c_1$ эта линия имеет форму гимнастической гантели, причем более «массивная» часть «гантели» описана около большей звезды A_2 (см. рис. 7.7). Если $\alpha\neq 0$, но достаточно мало (по сравнению с c), то линия (11) будет мало отличаться от овала.

Таким образом, при большом c линия Хилла разбивает всю плоскость на четыре области (см. рис. 7.5). Во всех точках каждой из этих областей величина $2U - c$ сохраняет знак. Чтобы определить этот знак, например, в D_3, достаточно рассмотреть *одну* какую-либо точку из D_3. Если возьмем в области D_3 точку $P(x, y)$, настолько далекую от C, чтобы было

$$x^2 + y^2 > 2c$$

и

$$\frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} < c,$$

то получим, что $2U - c > 0$. Значит, и во всей области D_3 $2U - c > 0$.

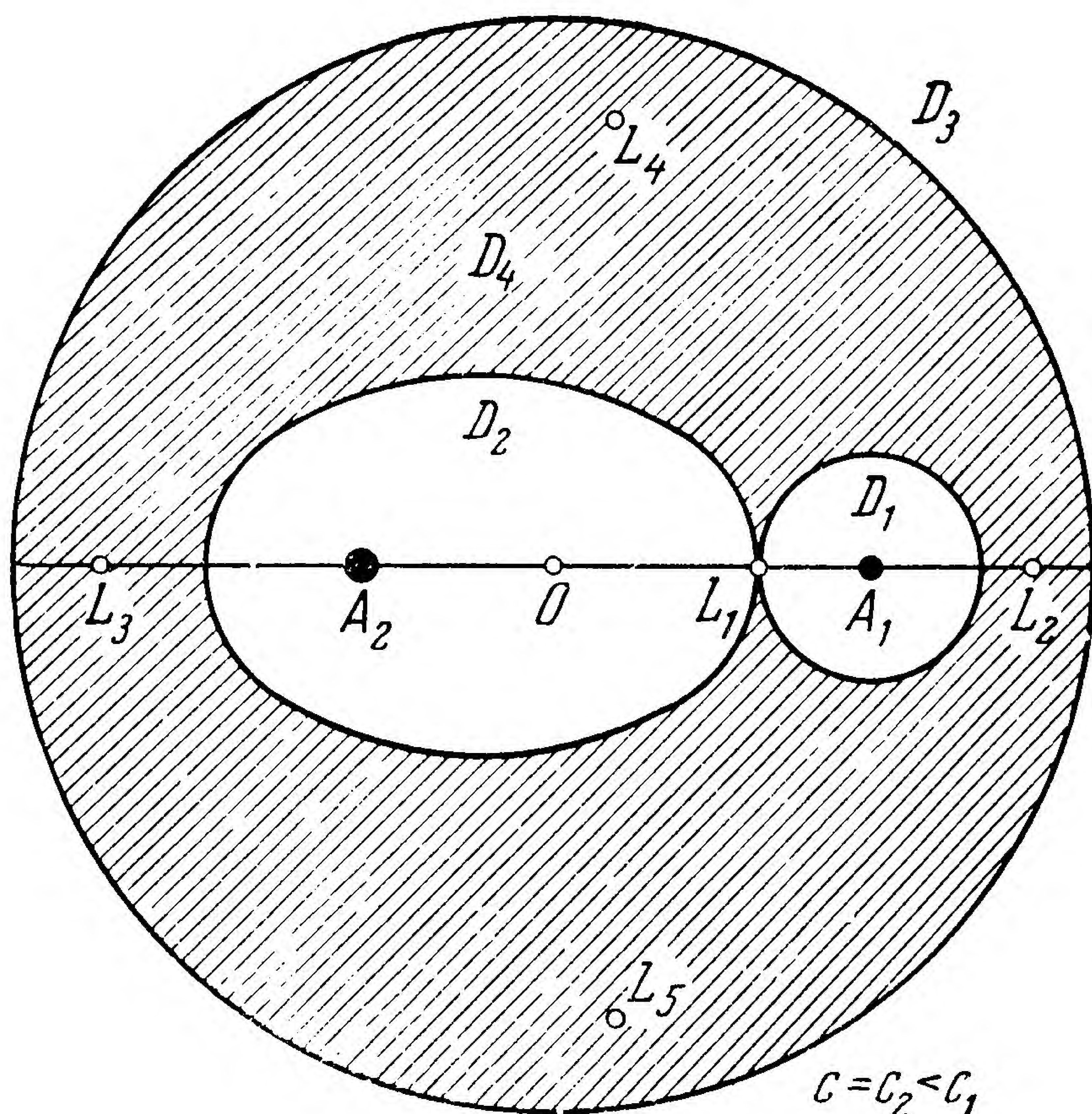


Рис. 7.6.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в областях D_2 и D_1 $2U - c > 0$, а в области D_4 $2U - c < 0$. Таким образом, при большом c спутник в своем движении не может попасть в область D_4 (на рис. 7.5 она заштрихована); если движение возможно, то лишь в областях D_1, D_2, D_3.

При уменьшении c происходит сжатие наружной ветви кривой (7) и расширение ее внутренних ветвей. Картина деформации кривой (7) при изменении c показана на рис. 7.5—7.11 *). Здесь

$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > c_5 > c_6 > c_7.$$

При некоторых частных значениях константы c может произойти самоприкосновение кривой (7), то есть прикосновение различных ее ветвей. Точка самоприкосновения будет особой для кривой Хилла. В такой точке частные про-

*) Эти рисунки носят ориентировочный характер и должны дать лишь качественное представление об изменении областей, в которых движение невозможно.

изводные функции $2U - c$ должны быть равны нулю, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \qquad (14)$$

Пусть в такой точке оказался спутник с нулевой относительной скоростью: $\dot{z} = 0$. Из уравнения движения спутника (см.(7.3.14))

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} i \qquad (15)$$

следует, что в такой точке $\ddot{z} = 0$. Но в предыдущем параграфе мы выяснили, что точки, в которых при выполнении условия $\dot{z} = 0$ имеет место равенство $\ddot{z} = 0$, являются точками либрации. Следовательно, каждая особая точка кривой (7) является точкой либрации.

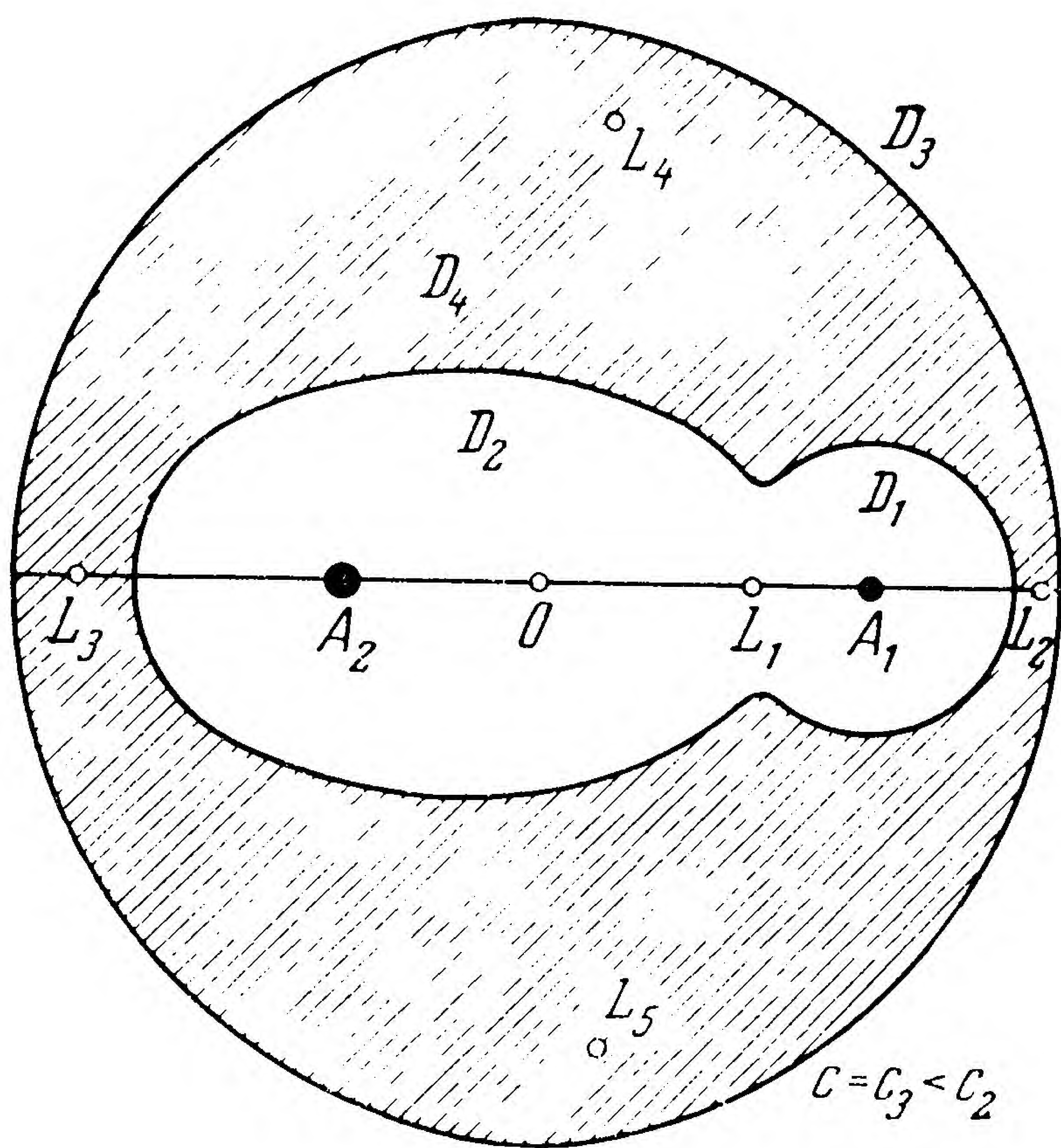


Рис. 7.7.

Следуя рассуждениям советского механика В. А. Егорова, проследим за эволюцией величины c и самой кривой Хилла (7) при нарастании начальной скорости v_0 спутника P, если последний находится в достаточно малой окрестности точки A_2 *).

Пусть в какой-то начальный момент t_0 спутник находится в точке P_0 на расстояниях ρ_{20} и ρ_{10} от звезд A_2 и A_1 вблизи звезды A_2 и получил начальную относительную скорость v_0. Константу c можно найти из зависимости

$$c = 2U_0 - v_0^2, \qquad (16)$$

*) В. А. Егоров рассматривал случай, когда A_1 — Луна, A_2 — Земля.

где

$$U_0 = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) + \frac{\mu}{\rho_{10}} + \frac{1-\mu}{\rho_{20}}. \qquad (17)$$

Если $v_0 = 0$ или v_0 мало, то спутник P останется внутри некоторого овала, описанного около притягивающего центра A_2. Из (16) видно, что при росте начальной скорости v_0 константа c будет убывать; при этом овал около точки A_2 и сходный овал около точки A_1 будут «разбухать».

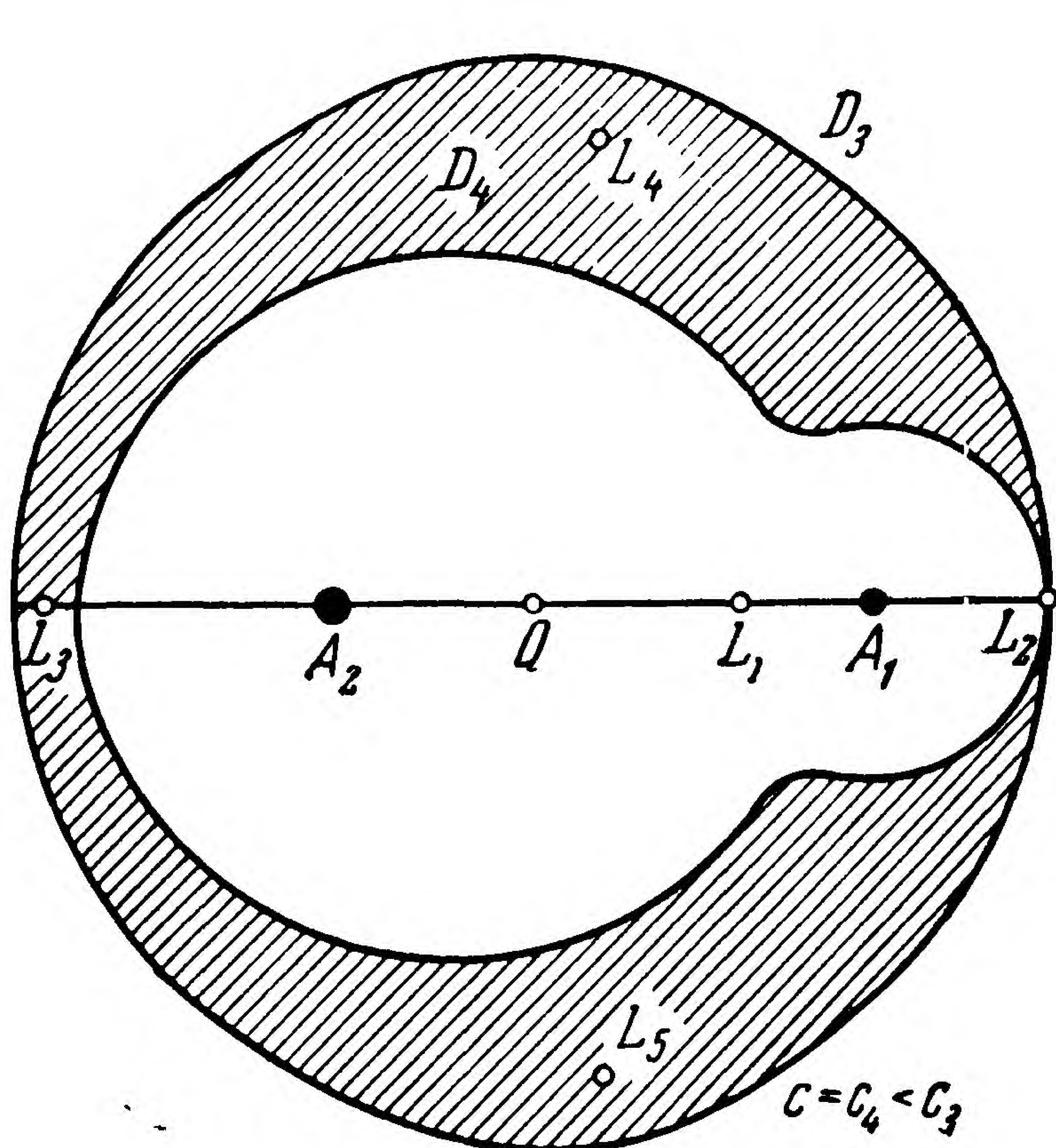


Рис. 7.8.

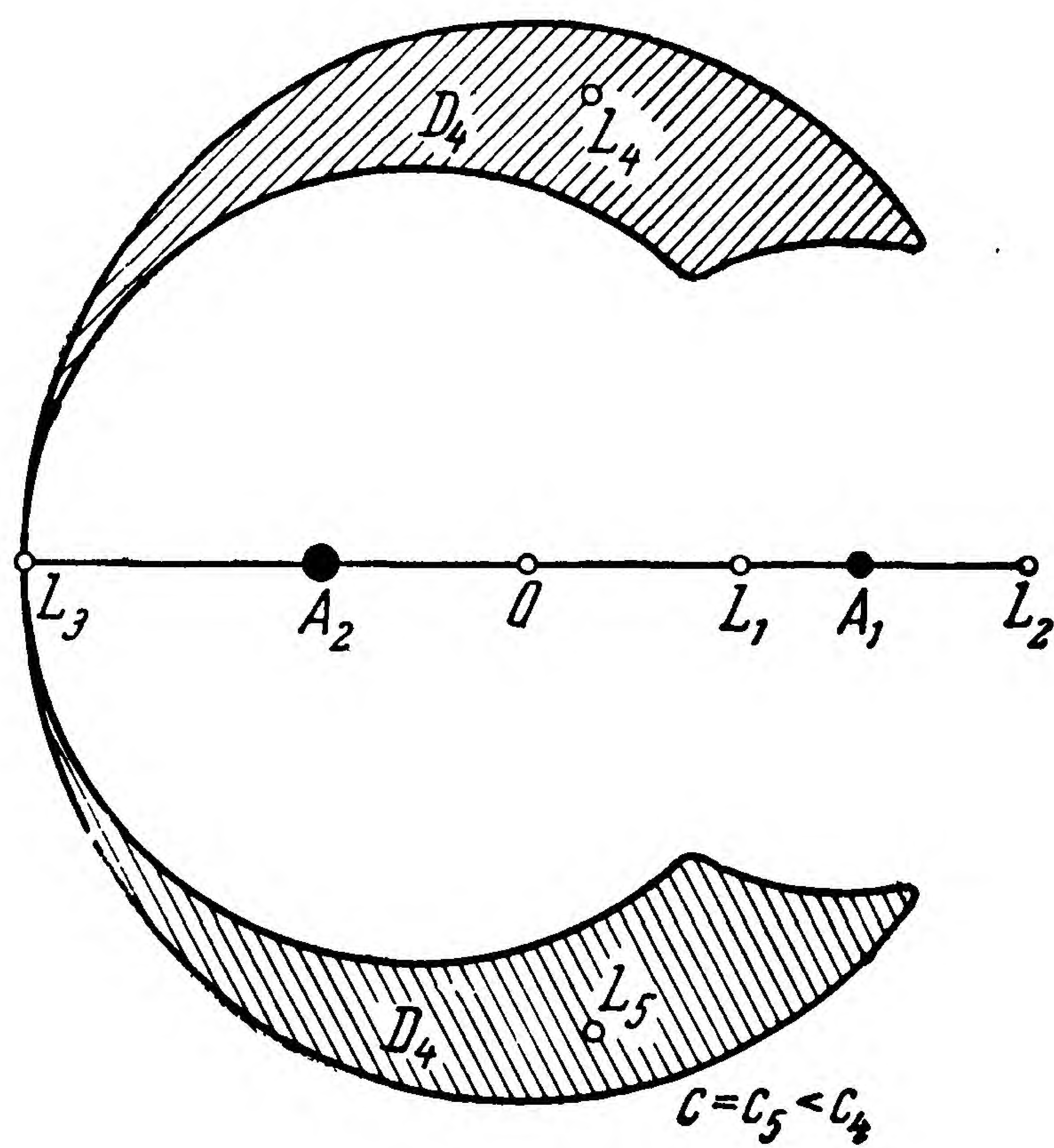


Рис. 7.9.

При некотором значении начальной скорости $v_0 = v_0^{(1)}$ овалы, описанные около притягивающих центров A_1 и A_2, сомкнутся в точке либрации L_1 (рис. 7.6). Зная положение этой точки (то есть ее координаты $x^{(1)}$, $y^{(1)}$), можно найти константу $c^{(1)}$ из уравнения

$$2U(x^{(1)}, y^{(1)}) - c^{(1)} = 0$$

[ср. с формулой (7); на рис. 7.6 $c^{(1)}$ обозначено через c_2].

При удачном выборе направления начальной скорости $v_0^{(1)}$ в принципе возможно достижение спутником точки либрации L_1, а при дальнейшем малом увеличении начальной скорости v_0 возможен перелет спутника из овала D_2 в овал D_1.

При дальнейшем возрастании начальной скорости v_0 величина c будет убывать [см. формулу (16)]. При определенных значениях c, равных определенным числам $c^{(2)}$, или $c^{(3)}$, или $c^{(4)}$ ($c^{(2)} > c^{(3)} > c^{(4)}$), уравнение (7) будет представлять собой уравнение кривой, имеющей особой точкой соответствующую точку либрации L_2, L_3, L_4 или L_5 (на рис. 7.8 и 7.9 $c^{(2)} \equiv c_4$, $c^{(3)} \equiv c_5$).

Значения этих чисел $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, $c^{(4)}$ можно найти, подставив в уравнение (7) вместо (x, y) координаты соответствующих точек либрации L_2, L_3, L_4. Интеграл Якоби (16) тогда позволит найти те минимальные относительные скорости $v_0^{(2)}$, $v_0^{(3)}$, $v_0^{(4)}$ в заданной точке P_0, при которых в принципе становится возможным достижение этих точек либрации *).

При скоростях, немного больших чем $v_0^{(2)}$, спутник может начать удаляться в бесконечность, но при этом он должен обязательно пройти вблизи точки L_2 (рис. 7.8)

При дальнейшем нарастании скорости v_0 будет расширяться «горловина» у точки L_2. Если спутник при такой начальной скорости сможет удалиться на бесконечно большое расстояние от звезд A_1 и A_2, то он обязательно пройдет через эту горловину.

Так будет обстоять дело до тех пор, пока начальная скорость v_0 меньше, чем $v_0^{(3)}$.

Если начальная скорость $v_0 = v_0^{(3)}$, то можно сообщить спутнику эту скорость в таком направлении, чтобы он достиг точки L_3 с нулевой относительной скоростью (рис. 7.9). При скорости, немного большей чем $v_0^{(3)}$, спутник может неограниченно удалиться от звезд A_1 и A_2, проходя через горловину вблизи точки либрации L_3.

При дальнейшем нарастании начальной скорости v_0 будет расширяться горловина у точки L_3 (как, впрочем, и у точки L_2), а области, не доступные спутнику ни при каком направлении начальной скорости, будут сжиматься к треугольным точкам либрации L_4 и L_5. При $v_0 > v_0^{(4)}$ спутник P может неограниченно удалиться от звезд A_1 и A_2, двигаясь в плоскости по любому направлению (рис. 7.11).

---

*) Скорости $v_0^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, иногда называют *критическими*.

Приведем в качестве примера значения критических скоростей для случая, когда притягивающими центрами служат Земля и Луна (табл. 2), причем малое тело (космическая ракета) находится в начальный момент в точке P_0 на высоте 200 *км* над поверхностью Земли, то есть на сфере радиуса 6570 *км*, описанной около центра Земли *).

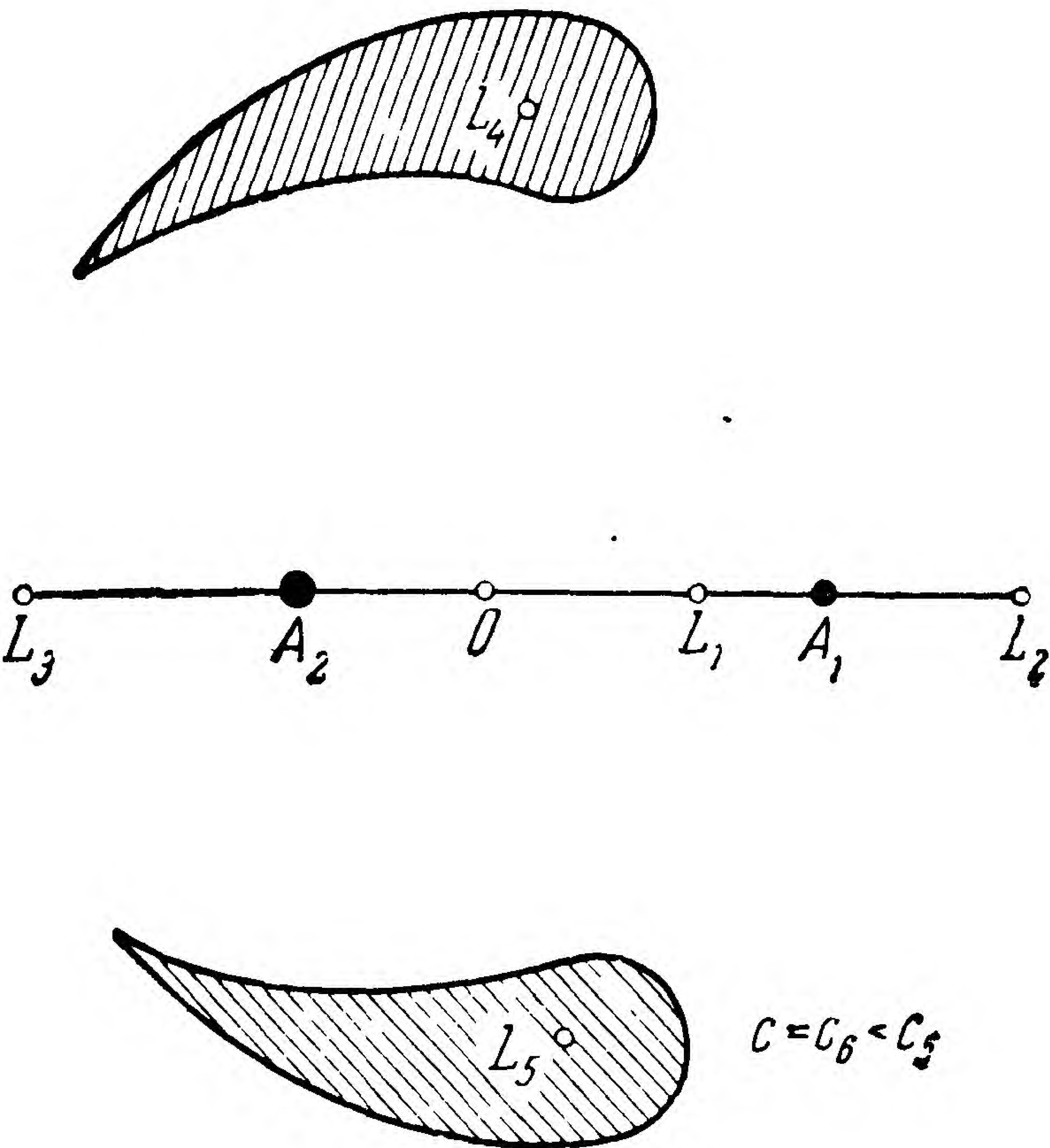


Рис. 7.10.

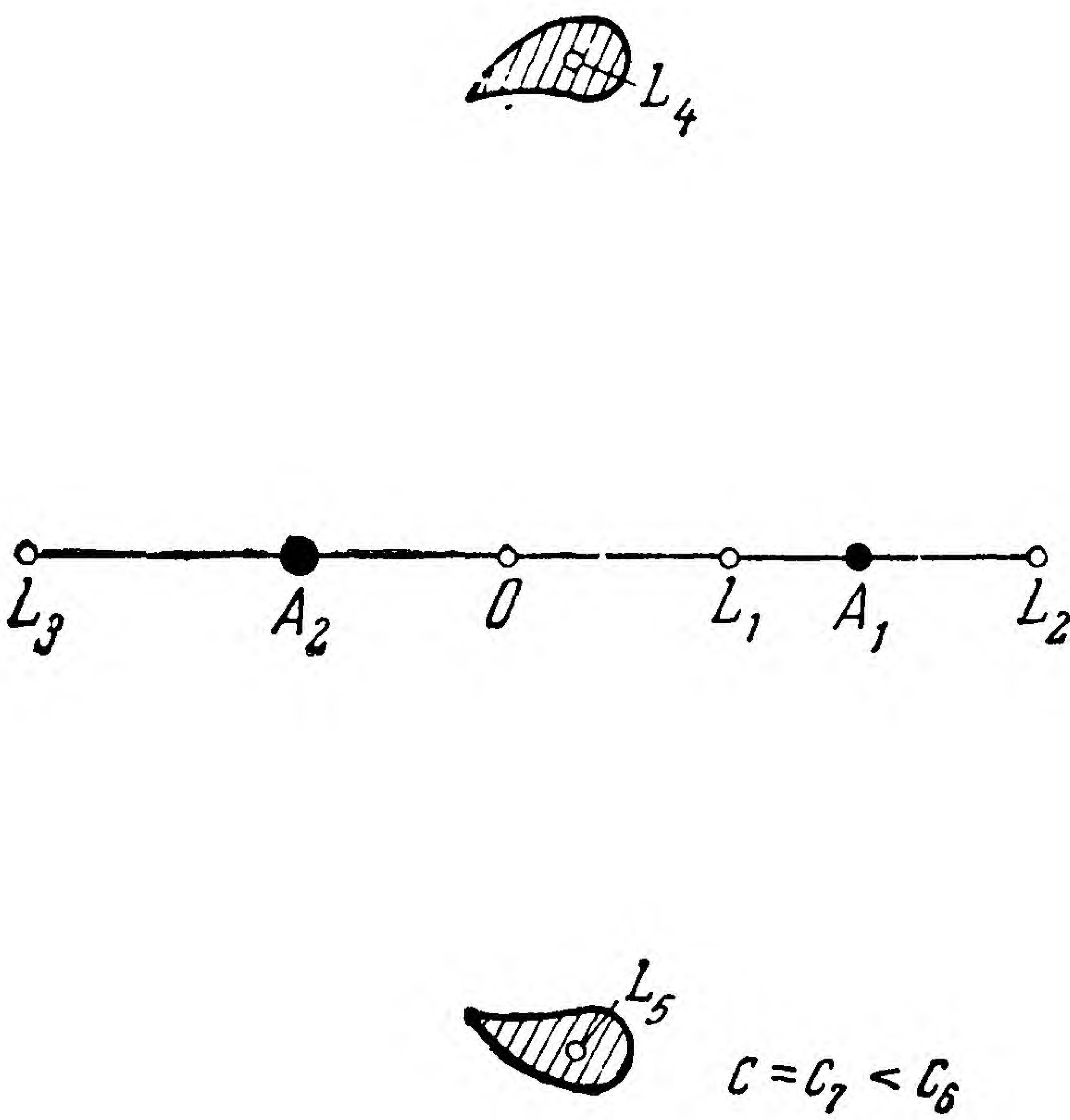


Рис. 7.11.

Как показывает более тщательный анализ, положение ракеты на этой сфере практически не влияет на значение соответствующей критической скорости.

Таблица 2

Точки либрации	Критическая относительная скорость, необходимая для достижения точки либрации, *м/сек*
L_1	10 848,90
L_2	10 849,68
L_3	10 857,38
L_4 (или L_5)	10 858,54

*) Данные заимствованы из [6.1].

§ 6. ДОПОЛНЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

1. Пространственная ограниченная задача трех тел. В предыдущих трех параграфах мы ради простоты ограничились случаем, когда движение обоих притягивающих центров и их спутника происходит в одной и той же плоскости.

Непосредственным обобщением этой задачи является «ограниченная пространственная круговая задача трех тел», о которой мы говорили в § 2.

Пользуясь интегралом Якоби (7.2.22), можно во вращающемся пространстве ввести в рассмотрение *поверхности* нулевой относительной скорости (поверхности Хилла), отделяющие области, в которых возможно движение спутника, от областей, в которых движение наверняка невозможно.

Еще более общий случай ограниченной задачи трех тел мы получим, если допустим, что (A_1, m_1) и (A_2, m_2) движутся относительно их барицентра C не по окружностям, а по каким-то иным коническим сечениям.

2. Теоремы о необратимости и симметрии в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел. Если в какой-то области пространства движение спутника двух притягивающих центров (A_1, m_1) и (A_2, m_2) ($m_1 < m_2$) возможно, то, разумеется, он может двигаться не по любой кривой из этой области и не в любом направлении. На следующие любопытные элементарные факты обратил внимание американский ученый А. Миеле (Miele).

а) *Теорема о необратимости*: если во вращающейся системе отсчета xyz возможно прямое движение спутника по траектории, заданной уравнением $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, то обратное движение вдоль этой траектории физически невозможно.

б) *Теорема о симметрии*: если физически возможна траектория

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \qquad \text{(A)}$$

то физически возможны еще такие три траектории:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} - z(t)\boldsymbol{k}, \qquad \text{(B)}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(t) = x(-t)\boldsymbol{i} - y(-t)\boldsymbol{j} + z(-t)\boldsymbol{k}, \qquad \text{(C)}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3(t) = x(-t)\boldsymbol{i} - y(-t)\boldsymbol{j} - z(-t)\boldsymbol{k}. \qquad \text{(D)}$$

Траектории (B), (C), (D) симметричны траектории (A), соответственно, относительно плоскости движения звезд A_1 и A_2, относительно плоскости Cxz и относительно прямой A_2A_1.

3. Проблема захвата. Большой интерес для космонавтики представляет следующая проблема захвата в ограниченной круговой задаче трех тел: может ли «непритягивающая» материальная точка (например, космическая ракета), пришедшая «из бесконечности» в некоторую ограниченную область D пространства, где она подвергается притяжению двух «звезд», остаться навсегда в этой области?

С первого взгляда может показаться очевидным, что всегда возможен такой «удачный» выбор направления и величины скорости «непритягивающей» точки, чтобы она, например, навсегда осталась внутри сферы притяжения одной из двух звезд. Так, кажется возможным направить космическую ракету с Земли к Марсу с тем, чтобы она вошла в сферу притяжения Марса (относительно Солнца) с малой скоростью и затем осталась внутри этой сферы.

Однако тщательный анализ приводит к совершенно иным выводам. Еще в 1930 году швейцарский математик Э. Хопф показал, что пришедшая из бесконечности непритягивающая точка, притягиваемая двумя звездами, должна, вообще говоря, снова удалиться в бесконечность. Иными словами, захват в ограниченной задаче трех тел чрезвычайно маловероятен *).

Весьма интересный анализ был произведен советским механиком В. А. Егоровым [6.1], [7.1]. Рассматривая случай, когда область D есть сфера притяжения или сфера действия меньшей звезды относительно большей звезды, он пришел к следующему выводу: если в круговой ограниченной задаче трех тел отношение притягивающих масс m_1/m_2 достаточно мало, то непритягивающая точка, пришедшая из бесконечности в сферу притяжения меньшей звезды, обязательно выйдет из этой сферы. Вывод остается в силе, если вместо сферы притяжения брать сферу действия меньшей звезды.

*) Точнее, множество начальных данных, при которых возможен захват, имеет нулевую меру в смысле Лебега. Однако результат Хопфа не исключает возможности захвата при некоторых «исключительных» значениях начальных данных.

Для того чтобы теорема Егорова имела место, достаточно, чтобы отношение масс m_1 / m_2 было порядка 10^{-4} или меньше. Отсюда, в частности, следует, что космическая ракета, посланная с Земли и попавшая с сферу притяжения или сферу действия Марса или Венеры, обязательно выйдет из этих сфер.

Теорема Егорова не позволяет сделать аналогичные выводы для систем Земля — Луна — ракета или Солнце — Юпитер — ракета. Для подобных случаев оказывается целесообразным следующее *приближенное* рассмотрение возможности захвата, предложенное В. А. Егоровым. Назовем *траекторией сближения* такую траекторию непритягивающего спутника P, которая а) начинается вблизи одного из притягивающих центров (A_2) и б) на первом обороте точки P относительно точки A_2 (то есть еще до того, как радиус-вектор A_2P сделает полный оборот вокруг точки A_2) входит в сферу действия второго притягивающего центра A_1.

В. А. Егоров рассматривает случай, когда A_2 — Земля, а A_1 — Луна. Он показывает, что траектория сближения обязательно должна выйти из сферы действия Луны. Иными словами, захват Луной космического корабля с Земли на траектории сближения невозможен. Значит, если захват снаряда с Земли и может произойти, то это во всяком случае не может быть на траектории сближения. Вывод В. А. Егорова следует из того, что участок траектории сближения внутри сферы действия Луны весьма близок к гиперболе (в селеноцентрической системе координат, то есть в системе отсчета с началом в центре Луны и с неизменно ориентированными осями координат).

Аналогично можно показать, что неуправляемый снаряд, который запущен с Земли и вошел в сферу действия какой-либо планеты (относительно Солнца) на первом своем обороте вокруг Солнца, обязательно выйдет из этой сферы действия (если он только не столкнется с планетой).

4. Осцилляция в ограниченной задаче трех тел. Будем рассматривать движение спутника двух звезд в инерциальной системе отсчета с началом в их барицентре C.

Если непритягивающему спутнику P двух притягивающих центров (A_1, m_1) и (A_2, m_2) сообщить в какой-либо точке

пространства достаточно большую скорость, то он уйдет в бесконечность (вспомните, например, задачу о третьей космической скорости, которую можно решить и в предположении, что ракета вовсе лишена способности притягивать).

Если же непритягивающему спутнику сообщена достаточно малая скорость, то он навсегда останется внутри некоторого конечного шара с центром в барицентре данных звезд.

Может показаться с первого взгляда, что при *любой* величине начальной скорости, сообщенной спутнику, возможен только один из этих двух исходов.

Советский математик К. А. Ситников обнаружил (см. [5.2]), что возможен еще и третий исход, а именно, может случиться, что спутник P будет совершать колебательное (осцилляционное) движение: при $t \to \infty$ его расстояния от каждого из притягивающих центров A_1, A_2 не остаются ограниченными и в то же время эти расстояния не стремятся к бесконечности.

К. А. Ситников строит конкретный пример системы трех тел, в которой имеет место осцилляция. Пусть звезды A_1 и A_2 имеют равные массы $m_1 = m_2 = M$; C — их барицентр; $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета; $C\xi\eta$ — плоскость, в которой движутся точки A_1 и A_2.

Предположим, что притягивающие центры A_1 и A_2 при своем движении описывают эллипсы с большой полуосью a и эксцентриситетом ε, отличным от нуля. Движение точек (A_1, M) и (A_2, M) будет вполне определено, если для какого-то одного момента будет задана величина угла φ между осью $C\xi$ и вектором $\overrightarrow{CA_1}$. Пусть при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, а непритягивающий спутник P находится в точке C и имеет скорость v_0, направленную по оси $C\zeta$. Для такого частного случая ограниченной задачи трех тел К. А. Ситников доказывает следующий факт.

Для каждого значения φ_0 и каждой последовательности положительных чисел $\{S_k\}$ (в частности, для любой последовательности, стремящейся к бесконечности) существует такое значение v_0, что при $t > 0$, $t \to \infty$ спутник P бесконечное число раз пройдет через точку C, удаляясь от нее после k-го прохождения на расстояние, большее, чем S_k, $k = 1, 2, \ldots$

5. Периодические орбиты. Дифференциальные уравнения ограниченной плоской круговой задачи трех тел могут быть решены для любого данного конечного промежутка времени с любой требуемой точностью, если воспользоваться методами численного интегрирования. Однако получаемые таким образом результаты не позволяют судить о движении непритягивающего спутника вне этого промежутка времени. Исключение составляет тот случай, когда движение периодическое.

Движение спутника P в ограниченной плоской круговой задаче трех тел называют *периодическим*, если его координаты $x(t)$, $y(t)$ во вращающейся системе отсчета являются периодическими функциями времени, то есть существует такая константа $\lambda > 0$, что $x(t+\lambda) = x(t)$, $y(t+\lambda) = y(t)$ при любом t. Если движение точки P является периодическим и мы знаем его в течение только одного периода, то тем самым мы знаем движение для любого промежутка времени. В течение последних 70 лет появилось значительное число исследований, посвященных периодическим орбитам ограниченной задачи трех тел. Так, например, группа датских астрономов (Т. Ти́ле, Э. Стремгрен и другие) дали полную классификацию периодических решений для так называемой Копенгагенской задачи, то есть для ограниченной плоской круговой задачи трех тел при условии, что массы притягивающих центров A_1 и A_2 равны ($m_1 = m_2$). Аналогичное исследование при $m_1 / m_2 = 1:10$ выполнил английский астроном Дж. Дарвин в последние годы XIX столетия. Фундаментальные результаты и методы в исследовании периодических орбит принадлежат русскому математику А. М. Ляпунову (1857—1918) и французскому математику А. Пуанкаре (1856—1912).

ГЛАВА VIII

ОТКЛОНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ОТ КЕПЛЕРОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

§ 1. ВОЗМУЩЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ОРБИТЫ

1. В главах II—IV мы подробно ознакомились с движением «спутника» (P, m) под действием тяготения к некоторому притягивающему центру (A, M). Траекторию, по которой движется спутник P относительно притягивающего центра A, обычно называют кеплеровой.

При изучении движения спутника, помимо тяготения к притягивающему центру, часто оказывается необходимым учитывать и другие факторы, которые действуют на спутник и существенно сказываются на описываемой им траектории. К таким факторам относятся:

1) тяготение к другим небесным телам (например, тяготение спутника Земли к Луне или Солнцу);

2) сопротивление атмосферы;

3) несферическая структура центрального тела (например, сплюснутость Земли);

4) световое давление на спутник;

5) электромагнитные силы, возникающие вследствие перемещения металлических частей спутника в электромагнитном поле центрального тела.

Равнодействующую $\boldsymbol{F}$ всех сил, учитываемых при решении задачи о движении спутника, можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{г} + \boldsymbol{F}_{в}.$$

Одно из них, $\boldsymbol{F}_{г}$ — «главная» сила, с которой спутник P притягивается к центральному телу, рассматриваемому как материальная точка; она определяется через массу центрального тела M, массу спутника m и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, соединяющий барицентр A центрального тела со спутни-

ком P, по закону всемирного тяготения:

$$\boldsymbol{F}_{\text{г}} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Второе слагаемое $\boldsymbol{F}_{\text{в}}$, обычно по модулю значительно меньшее, чем $\boldsymbol{F}_{\text{г}}$, называется возмущающей силой. Ускорение $\boldsymbol{\Phi}$, сообщаемое ею спутнику, называют возмущающим ускорением. Таким образом, уравнение движения спутника имеет вид

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}_{\text{в}},$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Phi}. \tag{1}$$

Если бы возмущающее ускорение $\boldsymbol{\Phi}$ было равно нулю, то уравнение (1) представляло бы собой дифференциальное уравнение задачи двух тел и определило бы кеплерову орбиту (эллипс, гиперболу или параболу). Положение, форма, размеры орбиты и положение самого спутника на ней полностью характеризовались бы шестью константами — элементами этой орбиты Ω, γ, ε, p, ω, τ *).

Если же $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$, то орбита, вообще говоря, не будет коническим сечением. Но мы можем все же считать, что спутник в каждый момент времени t находится на некотором коническом сечении, а именно на той кеплеровой орбите, на которой он оказался бы, если бы в момент t вдруг прекратилось действие возмущающей силы.

Для каждого момента времени t будет своя такая кеплерова орбита. Иначе говоря, коническое сечение, на котором находится спутник, меняется с течением времени, оно как бы «дышит», то разбухая, то сжимаясь, то поворачиваясь в пространстве. Это значит, что элементы этой орбиты, вообще говоря, меняются с течением времени, они являются функциями от времени t. Но в каждый момент времени t такое коническое сечение касается истинной траектории спутника в той самой точке, где в этот момент и

*) Через τ мы в этой главе обозначаем момент прохождения спутника через перицентр.

находится спутник. Непрерывно меняющаяся кеплерова орбита, которая строится указанным выше образом, называется *оскулирующей орбитой*, а ее элементы

$$\Omega(t),\ \gamma(t),\ \varepsilon(t),\ p(t),\ \omega(t),\ \tau(t) \tag{2}$$

называют *оскулирующими*.

Если шесть функций (2) известны, то можно найти положение спутника в любой момент времени t_1.

Например, если окажется, что $\varepsilon(t_1) < 1$ и $\gamma(t_1) \neq 0$, то три координаты спутника P в момент t_1 можно вычислить по формулам (4.2.25) (предварительно придется вычислить a, b и E, что нетрудно сделать). По сходным формулам можно найти положение спутника и в том случае, когда $\varepsilon(t_1) > 1$ или $\varepsilon(t_1) = 1$.

Для нахождения шести функций (2) используют вспомогательные уравнения, которые связывают производные от этих функций с самими функциями. Эти дифференциальные уравнения называются *уравнениями Ньютона — Лагранжа*.

Для вывода уравнений Ньютона — Лагранжа воспользуемся приемом, предложенным А. И. Лурье [8.9].

2. В дальнейшем нам потребуются некоторые несложные вспомогательные факты, относящиеся к кинематике твердого тела, вращающегося вокруг некоторой точки A.

1) Если тело вращается вокруг некоторой оси, проходящей через точку A, с угловой скоростью *) ω, то можно это вращение задать вектором $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — орт оси вращения; при этом скорость $\boldsymbol{v}$ каждой точки P этого тела определяется через ее радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R} \equiv \overrightarrow{AP}$) по формуле

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

или

$$d\boldsymbol{R}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

2) При *любом* движении твердого тела, имеющего неподвижную точку A, можно в каждый момент времени t подобрать такой вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$, что для любой точки P этого тела будет иметь место равенство

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

*) Угловая скорость ω, о которой говорится в этом пункте, не имеет ничего общего с аргументом перицентра ω (одним из элементов орбиты спутника), о котором мы говорили выше.

где $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{AP}$. Ось, проходящая через точку A и определяемая вектором $\boldsymbol{\omega}$, называется *мгновенной осью вращения* тела, а сам вектор $\boldsymbol{\omega}$ — *мгновенной угловой скоростью тела.*

3) При сложении нескольких движений твердого тела, имеющего неподвижную точку A, мгновенные угловые скорости складываются.

4) Движение тела, обладающего неподвижной точкой A, полностью определено, если в каждый момент времени известно положение осей подвижной системы отсчета $A\xi\eta\zeta$, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы отсчета $Axyz$. Пусть можно перейти от системы $Axyz$ к системе $A\xi\eta\zeta$ при помощи трех последовательных поворотов вокруг осей, определяемых единичными векторами $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, соответственно на углы α_1, α_2, α_3 (α_k и $\boldsymbol{n}_k$ могут меняться с течением времени). Тогда мгновенные скорости вращения вокруг каждой из этих осей характеризуются векторами

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\alpha}_1(t)\boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\alpha}_2(t)\boldsymbol{n}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\alpha}_3(t)\boldsymbol{n}_3, \tag{6}$$

а мгновенная скорость вращения тела может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3,$$

то есть

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}_1\boldsymbol{n}_1 + \dot{\alpha}_2\boldsymbol{n}_2 + \dot{\alpha}_3\boldsymbol{n}_3.$$

3. Выведем теперь уравнения Ньютона — Лагранжа. Пусть движение спутника P (рис. 8.1) рассматривается относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат $Axyz$ с началом в притягивающем центре A. Единичные векторы осей обозначим соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Рассмотрим в каждый момент времени t три взаимно ортогональных единичных вектора: вектор $\boldsymbol{e}_1$ — орт радиуса-вектора спутника $\overrightarrow{AP}$; вектор $\boldsymbol{e}_2$ — единичный вектор поперечной составляющей скорости спутника $\boldsymbol{v}_n$ (этот вектор лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор спутника $\overrightarrow{AP}$ и вектор его скорости $\boldsymbol{v}$); вектор $\boldsymbol{e}_3$,

определяемый формулой

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

Перенося эти три единичных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в одну точку A, получим ортогональный триэдр, который можно рассматривать как некоторое твердое тело. С течением времени этот триэдр будет вращаться, но одна его точка (A)

Рис. 8.1.

останется все время неподвижной. Поэтому к триэдру $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ можно применить положения кинематики твердого тела (см. п. 2).

Оси $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ подвижной системы координат $A\xi\eta\zeta$ направим вдоль векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Проекции возмущающего ускорения $\boldsymbol{\Phi}$ на эти оси обозначим соответственно через Φ_1, Φ_2, Φ_3. Если бы в момент t прекратилось действие возмущающей силы $F_в$, то спутник стал бы двигаться по какому-то коническому сечению (по кеплеровой орбите). Обозначим элементы этой орбиты относительно системы отсчета $Axyz$ через

$$\Omega, \ \gamma, \ p, \ \varepsilon, \ \omega, \ \tau.$$

Если бы спутник двигался по этой орбите, то в любой последующий момент его положение и скорость определялись бы формулами задачи двух тел, выведенными в главе II. Таким образом, уравнение орбиты имело бы вид

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_1, \tag{7}$$

где

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}, \tag{8}$$

а скорость $\boldsymbol{v}$ определялась бы формулой

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \\ v_n &= \sqrt{\frac{K}{p}}\,(1 + \varepsilon\cos\theta) = \frac{\sqrt{Kp}}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В этих формулах при движении по *кеплеровой* орбите меняется θ, а величины ε, p остаются постоянными.

В *возмущенном* движении, меняя t, мы будем переходить от одной кеплеровой орбиты к другой. Каждый раз радиус-вектор и скорость спутника будут определяться по формулам (7) — (10), но в этих формулах не только θ, но и ε и p будут функциями от времени.

В момент времени t спутник, двигаясь по своей реальной, «возмущенной» орбите, имеет некоторую скорость, которая может быть определена по формуле

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{11}$$

С другой стороны, если бы в этот момент t прекратилось действие возмущающей силы, то спутник, имея ту же мгновенную скорость $\boldsymbol{v}$, стал бы двигаться по *кеплеровой* орбите. Но в таком случае его скорость определялась бы по

формуле (9). Следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2. \tag{12}$$

Это равенство должно иметь место в каждый момент времени t, оно является тождеством, и поэтому его можно продифференцировать по t:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2). \tag{13}$$

С другой стороны, по условию (1)

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2) = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}. \tag{14}$$

Из (12) и (7) имеем

$$\frac{d(r\boldsymbol{e}_1)}{dt} = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2. \tag{15}$$

Два векторных равенства (14) и (15) и являются, по сути дела, дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В дальнейшем мы: 1) заменим их шестью скалярными равенствами; 2) выразим входящие в эти равенства величины через оскулирующие элементы $\varepsilon(t)$, $p(t)$, $\Omega(t)$, $\gamma(t)$, $\omega(t)$, $\tau(t)$ и их первые производные; 3) получим выражения для производных от оскулирующих элементов. Это и будут уравнения Ньютона — Лагранжа.

4. Итак, сначала заменим *два векторных равенства* (14), (15) *шестью скалярными*. Производя дифференцирование в левых частях уравнений (15), (14), получим:

$$r\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_1 = v_r\boldsymbol{e}_1 + v_n\boldsymbol{e}_2, \tag{16}$$

$$v_r\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} + \frac{dv_r}{dt}\boldsymbol{e}_1 + v_n\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} + \frac{dv_n}{dt}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\Phi}. \tag{17}$$

Освободимся от входящих в (16) и (17) векторов $\frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt}$, $k = 1, 2, 3$, выразив их через $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и $\{\omega_k\}$.

Рассматривая триэдр $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ как твердое тело, мы можем записать вектор мгновенной скорости его вращения $\boldsymbol{\omega}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3, \tag{18}$$

причем согласно тождеству (4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_1, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_2, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Заменяя в этих формулах $\boldsymbol{\omega}$ при помощи (18), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} &= -\omega_2\boldsymbol{e}_3 + \omega_3\boldsymbol{e}_2, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} &= \omega_1\boldsymbol{e}_3 - \omega_3\boldsymbol{e}_1, \\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} &= -\omega_1\boldsymbol{e}_2 + \omega_2\boldsymbol{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Подставляя теперь найденные значения производных в (16), (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах, получим шесть скалярных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ r\omega_3 &= v_n, \\ \omega_2 &= 0, \\ \frac{dv_r}{dt} - v_n\omega_3 &= -\frac{K}{r^2} + \Phi_1, \\ v_r\omega_3 + \frac{dv_n}{dt} &= \Phi_2, \\ -v_r\omega_2 + v_n\omega_1 &= \Phi_3. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы легко находятся величины $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dv_r}{dt}$, $\frac{dv_n}{dt}$, ω_1, ω_2, ω_3:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_n^2}{r} - \frac{K}{r^2} + \Phi_1, \\ \frac{dv_n}{dt} &= -\frac{v_r v_n}{r} + \Phi_2, \\ \omega_1 &= \frac{\Phi_3}{v_n}, \ \omega_2 = 0, \ \omega_3 = \frac{v_n}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Таким образом, вместо двух векторных равенств (14), (15) мы теперь имеем шесть скалярных равенств (21).

5. Входящие в (21) вспомогательные величины ω_1, ω_2, ω_3 попытаемся выразить через *оскулирующие элементы и их производные*.

Величины ω_1, ω_2, ω_3 — это проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, определяемые ортами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3.$$

Вспомним, что $\boldsymbol{\omega}$ — это вектор мгновенной угловой скорости вращения триэдра $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Положение этого триэдра относительно неподвижной системы отсчета $Axyz$ характеризуется тремя углами Ω, γ, ω. Для того чтобы перейти от системы отсчета $Axyz$ к системе $A\xi\eta\zeta$, необходимо совершить последовательно три поворота: на угол Ω вокруг оси Az (определяемой ортом $\boldsymbol{k}$), затем на угол γ вокруг линии узлов $A\Omega$ (определяемой ортом $\boldsymbol{\beta}$), и, наконец, на угол u ($u = \omega + \theta$) вокруг оси $A\zeta$ (определяемой ортом $\boldsymbol{e}_3$) *). Мгновенные угловые скорости вращения вокруг каждой из этих осей равны соответственно $\dot{\Omega}\boldsymbol{k}$, $\dot{\gamma}\boldsymbol{\beta}$, $\dot{u}\boldsymbol{e}_3$. Поэтому в каждый момент времени мгновенная угловая скорость вращения триэдра $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Omega}{dt}\boldsymbol{k} + \frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{\beta} + \frac{du}{dt}\boldsymbol{e}_3. \tag{22}$$

---

*) Угол u обычно называют *аргументом широты*.

Если выразим векторы β *и* $\boldsymbol{k}$ *через* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ *и подставим эти выражения в* (22), *то затем легко найдем* ω_1, ω_2, ω_3.

Вектор β лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и направлен под углом u к орту $\boldsymbol{e}_1$ и под углом $u + 90°$ к орту $\boldsymbol{e}_2$. Поэтому

$$\beta = \cos u\, \boldsymbol{e}_1 - \sin u\, \boldsymbol{e}_2. \tag{23}$$

Разложим вектор $\boldsymbol{k}$ по ортам триэдра:

$$\boldsymbol{k} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3. \tag{24}$$

Вектор $\boldsymbol{k}$ наклонен к орту $\boldsymbol{e}_3$ под углом γ. Поэтому

$$c_3 = \cos\gamma. \tag{25}$$

Чтобы найти c_1 и c_2, умножим (24) векторно на $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_3 = -c_1\boldsymbol{e}_2 + c_2\boldsymbol{e}_1. \tag{26}$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_3 = \sin\gamma\cdot\beta. \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$c_1 = \sin\gamma\sin u, \quad c_2 = \sin\gamma\cos u.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{k} = \sin\gamma\sin u\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\gamma\cos u\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\, \boldsymbol{e}_3. \tag{28}$$

Подставляя выражения (28) и (23) для β и $\boldsymbol{k}$ в (22) и группируя коэффициенты при ортах, получим проекции вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижного триэдра:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \sin\gamma\sin u\frac{d\Omega}{dt} + \cos u\frac{d\gamma}{dt},\\
\omega_2 &= \sin\gamma\cos u\frac{d\Omega}{dt} - \sin u\frac{d\gamma}{dt},\\
\omega_3 &= \cos\gamma\frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt}.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Таким образом, *мы выразили величины* ω_1, ω_2, ω_3 *через оскулирующий элемент*, γ, *аргумент широты* u *и производные от* Ω, γ, u.

6. *Используя* (29) *и* (21), *найдем* $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, *а также* $\frac{du}{dt}$.

Действительно, подставляя значения для ω_1, ω_2, ω_3 из (29) в последние три равенства системы (21) и привлекая еще (10), получим систему трех линейных уравнений относительно производных $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{du}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\gamma\sin u\frac{d\Omega}{dt}+\cos u\frac{d\gamma}{dt}=\Phi_3\frac{r}{\sqrt{Kp}},\\ &\sin\gamma\cos u\frac{d\Omega}{dt}-\sin u\frac{d\gamma}{dt}=0,\\ &\cos\gamma\frac{d\Omega}{dt}+\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Из первых двух уравнений легко находятся производные $\frac{d\Omega}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{\sqrt{Kp}}\frac{\sin u}{\sin\gamma}\Phi_3, \tag{31}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{r\cos u}{\sqrt{Kp}}\Phi_3, \tag{32}$$

а затем из третьего получаем $\frac{du}{dt}$:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}-\frac{r}{\sqrt{Kp}}\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3. \tag{33}$$

Так как $u=\omega+\theta$, то отсюда легко можно найти величину $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\omega}{dt}+\frac{\sqrt{Kp}}{r^2}-\frac{r}{\sqrt{Kp}}\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3. \tag{34}$$

Уравнения (31), (32) *являются двумя из шести уравнений системы Ньютона — Лагранжа*, а уравнение (34) мы используем далее для получения остальных уравнений этой системы.

7. Найдем теперь

$$\frac{d\omega}{dt},\ \frac{dp}{dt},\ \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Для этого обратимся к первым трем уравнениям системы (21). Используя (8) и (10), перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{K}{r^2}\,\varepsilon\cos\theta + \Phi_1, \\ \frac{dv_n}{dt} &= -\frac{K}{r^2}\,\varepsilon\sin\theta + \Phi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Из (8) и (10) видно, что величины r, v_r, v_n зависят от t через посредство трех функций θ, ε, p. Поэтому по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ \frac{dv_n}{dt} &= \frac{\partial v_n}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

При помощи (8) и (10) находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{\varepsilon\sin\theta}{p}\,r^2, \quad \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{r}{p}, \quad \frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = -\frac{r^2}{p}\cos\theta, \\ &\frac{\partial v_r}{\partial\theta} = \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\cos\theta, \quad \frac{\partial v_r}{\partial p} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{\varepsilon\sin\theta}{p}, \\ &\frac{\partial v_r}{\partial\varepsilon} = \sqrt{\frac{K}{p}}\sin\theta, \quad \frac{\partial v_n}{\partial\theta} = -\sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta, \\ &\frac{\partial v_n}{\partial p} = -\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{1}{2r}, \quad \frac{\partial v_n}{\partial\varepsilon} = \sqrt{\frac{K}{p}}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Подставляя величины (37) и (34) в (36), а затем (36) в уравнения (35), получим три линейных уравнения относительно $\frac{d\omega}{d'}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned}
&-\varepsilon\sin\theta\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{r}\frac{dp}{dt}-\cos\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{r\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3,\\
&-\varepsilon\cos\theta\frac{d\omega}{dt}-\frac{\varepsilon\sin\theta}{2p}\frac{dp}{dt}+\sin\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\\
&\qquad\qquad=\frac{r\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3+\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_1,\\
&\varepsilon\sin\theta\frac{d\omega}{dt}-\frac{1}{2r}\frac{dp}{dt}+\cos\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\\
&\qquad\qquad=-\frac{r\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\Psi_3+\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_2,
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

где

$$\Psi_3=\sin u\operatorname{ctg}\gamma\,\Phi_3.$$

Складывая первое и третье уравнения, найдем $\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{dp}{dt}=2r\sqrt{\frac{p}{K}}\Phi_2.\qquad(39)$$

Подставляя найденное $\frac{dp}{dt}$ в первое и второе уравнения и привлекая уравнение (8), после несложных выкладок получим

$$\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{K}}\left[-\frac{\cos\theta}{\varepsilon}\Phi_1+\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\theta}{\varepsilon}\Phi_2-\right.$$
$$\left.-\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3\right],\qquad(40)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\sqrt{\frac{p}{K}}\left\{\sin\theta\,\Phi_1+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta+\varepsilon\frac{r}{p}\right]\Phi_2\right\}.\qquad(41)$$

Приведем еще без вывода формулы для производной оскулирующего элемента τ:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{\varepsilon K}\left[(\varepsilon \sin\theta\, N - \cos\theta)\,\Phi_1 + \frac{p}{r} N\Phi_2\right]. \tag{42}$$

Здесь

$$N = \frac{2p^2}{r^2}\int_0^\theta \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}. \tag{43}$$

Уравнения (31), (32), (39) — (42) *и представляют собой искомую систему уравнений Ньютона — Лагранжа.*

8. Во многих практически встречающихся случаях возмущающее ускорение Φ не зависит явно от времени t. Тогда и правые части дифференциальных уравнений Ньютона — Лагранжа тоже не зависят явно от t. В этом случае целесообразно принять за независимое переменное вместо времени t аргумент широты u [8.11]. Воспользуемся для этого уравнением (33), которое перепишем в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{Kp}}{r^2\Gamma}, \tag{44}$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{1 - \frac{r^3}{Kp}\operatorname{ctg}\gamma \sin u\,\Phi_3}. \tag{45}$$

Переходя в уравнениях (31), (32), (39) — (42) к дифференцированию по u, при помощи (44) получим:

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3\Gamma}{Kp}\frac{\sin u}{\sin\gamma}\Phi_3, \tag{46}$$

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{r^3\Gamma}{Kp}\cos u\,\Phi_3, \tag{47}$$

$$\frac{dp}{du} = \frac{2r^3\Gamma}{K}\Phi_2, \tag{48}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{r^2\Gamma}{K\varepsilon}\left[\sin\theta\,\Phi_1 + \cos\theta\left(1+\frac{r}{p}\right)\Phi_2 + \varepsilon\frac{r}{p}\Phi_2\right], \tag{49}$$

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r^2\Gamma}{K\varepsilon}\left[\cos\theta\,\Phi_1 + \varepsilon\sin\theta\left(1 + \frac{r}{p}\right)\Phi_2 - \right.$$
$$\left. - \varepsilon\frac{r}{p}\operatorname{ctg}\gamma\sin u\,\Phi_3\right], \qquad (50)$$

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{r^4\Gamma}{\varepsilon K\sqrt{Kp}}\left[(\varepsilon\sin\theta\,N - \cos\theta)\,\Phi_1 + \frac{p}{r}N\,\Phi_2\right]. \qquad (51)$$

Заметим, что формулы (46) — (51) получаются из уравнений (31), (32), (39) — (42), если в последних заменить t на u и правую часть умножить на $r^2\Gamma/\sqrt{Kp}$.

§ 2. ВЛИЯНИЕ СПЛЮСНУТОСТИ ПЛАНЕТЫ НА ТРАЕКТОРИЮ СПУТНИКА

Как мы уже отмечали в главе I (§ 3), потенциал планеты, имеющей форму сжатого сфероида, можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$U = \frac{K}{r} + J_2 K\frac{R_э^2}{r^3}\frac{1}{2}(3\sin^2\Psi - 1), \qquad (1)$$

где r — расстояние от барицентра планеты (A) до спутника (P), Ψ — угол наклона радиуса-вектора спутника $\overrightarrow{AP}$ к плоскости экватора, $R_э$ — экваториальный радиус планеты, J_2 — безразмерная константа, $K = fM_п$, $M_п$ — масса планеты. В случае Земли $J_2 = -1082{,}8\cdot 10^{-6}$.

Отметим без доказательства, что J_2 можно вычислить по формуле

$$J_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta^2 R_э}{g_э} - 2\alpha\right), \qquad (2)$$

где $g_э$ — ускорение силы тяготения к планете на экваторе, δ — угловая скорость вращения планеты вокруг ее оси и α — сжатие планеты.

Будем рассматривать движение спутника планеты в следующей системе отсчета: за основную плоскость Axy примем плоскость экватора; направление оси Ax сохраним неизменным в пространстве (в частности, в случае Земли ось Ax направим в точку весеннего равноденствия); ось

Az направим в один из полюсов планеты; ось Ay выберем так, чтобы система $Axyz$ была правоориентированной. За возмущающую силу мы примем разность между силой, с которой спутник притягивается к планете, и силой, с которой спутник притягивался бы к точке A, если бы в ней была сосредоточена вся масса планеты.

Возмущающая сила имеет потенциал

$$U_1 = J_2 K \frac{R_э^2}{2r^3} (3 \sin^2 \Psi - 1). \tag{3}$$

Вычислим проекции возмущающего ускорения $\mathbf{\Phi}$, сообщаемого спутнику, на оси координат $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$:

$$\Phi_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Проектируя на небесную сферу плоскости меридиана, экватора и орбиты спутника, получим прямоугольный сферический треугольник. Величины u, Ψ, γ являются в этом треугольнике соответственно гипотенузой, катетом и углом, противолежащим этому катету. Согласно известной формуле сферической тригонометрии [0.17]

$$\sin \Psi = \sin u \sin \gamma.$$

Поэтому

$$U_1 = J_2 \frac{KR_э^2}{2r^3} (3 \sin^2 u \cdot \sin^2 \gamma - 1). \tag{5}$$

Дадим r приращение Δr, а u и γ менять не будем. Тогда $\Delta\xi = \Delta r$, $\Delta\eta = \Delta\zeta = 0$, а U_1 получит приращение ΔU_1. Поэтому

$$\Phi_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta r} = \frac{\partial U_1}{\partial r},$$

то есть

$$\Phi_1 = -\frac{3}{2} J_2 \frac{KR_э^2}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 \gamma - 1). \tag{6}$$

Дадим величине u малое приращение Δu, а r и γ закрепим. Тогда ξ и ζ не изменятся, а η получит приращение,

равное $r \cdot \Delta u$; U_1 получит приращение ΔU_1. Поэтому

$$\Phi_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \to 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta \eta} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta U_1}{r \Delta u} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

то есть

$$\Phi_2 = \frac{3}{2} J_2 \frac{K R_э^2}{r^4} \sin 2u \sin^2 \gamma. \tag{7}$$

При помощи несколько более сложных выкладок можно показать, что

$$\Phi_3 = \frac{3}{2} J_2 \frac{K R_э^2}{r^4} \sin u \sin 2\gamma. \tag{8}$$

Получим теперь (в первом приближении) скорость изменения элементов орбиты спутника в предположении, что оскулирующая орбита — эллипс. Начнем с долготы восходящего узла Ω. Обозначим через $d\Omega/dN$ изменение параметра Ω за один оборот спутника, то есть от того момента, когда $u = 0$, до того момента, когда $u = 2\pi$:

$$\frac{d\Omega}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du. \tag{9}$$

Но в силу (8) и (8.1.46)

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 \Gamma}{Kp} \frac{\sin u}{\sin \gamma} \cdot \frac{3}{2} J_2 \frac{K R_э^2}{r^4} \sin u \sin 2\gamma =$$

$$= 3J_2 \frac{R_э^2 \Gamma}{p^2} \cos \gamma \sin^2 u \, [1 + \varepsilon \cos (u - \omega)].$$

Проинтегрируем это выражение по u от 0 до 2π. При этом можно в первом приближении принять, что $\Gamma \approx 1$ и что в течение одного оборота можно считать p, ω и γ постоянными.

$$\frac{d\Omega}{dN} = 3J_2 \frac{\pi R_э^2}{p^2} \cos \gamma \text{ рад/об} = 3J_2 \frac{180 \cdot R_э^2}{p^2} \cos \gamma \text{ град/об}. \tag{10}$$

Совершенно аналогично можно из (7), (8) и (8.1.50) получить:

$$\frac{d\omega}{dN} = 3J_2 \frac{\pi R_э^2}{p^2} (5\cos^2\gamma - 1) \; рад/об =$$

$$= 3J_2 \frac{180 \cdot R_э^2}{p^2} (5\cos^2\gamma - 1) \; град/об. \qquad (11)$$

Что касается других элементов орбиты спутника (p, ε, γ, τ), то они могут из-за сплюснутости планеты испытывать довольно значительные *периодические* изменения. Однако окончательные изменения этих элементов орбиты за один полный оборот будут весьма малыми и ими можно в первом приближении пренебречь.

Формулы (10) и (11) иногда записывают в ином виде, удобном в случае малого эксцентриситета ε. Пусть экваториальный радиус планеты ($R_э$) и большая полуось орбиты спутника (a) измеряются в *км*, а гравитационный параметр K имеет размерность *км*^{3}/*сек*^{2}; тогда период обращения спутника (T) составляет $2\pi a^{3/2}/\sqrt{K}$ *сек*.

Поэтому в среднем за одну секунду Ω изменится на величину $\frac{d\Omega}{dN}/T$, то есть на

$$\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K_э}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos\gamma \; рад.$$

Итак, мы пришли к следующей приближенной формуле:

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \cos\gamma \; рад/сек, \qquad (12)$$

или

$$\dot{\Omega} = \frac{180}{\pi}\, 86\,400\, \frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos\gamma}{(1-\varepsilon^2)^2} \; град/сут \qquad (13)$$

(здесь сутки понимаются как земные средние солнечные сутки).

Для орбит спутников Земли, имеющих эксцентриситет $\varepsilon < 0{,}1$, можно заменить формулу (13) более простой, если

учесть, что $J_2 = -1082{,}8 \cdot 10^{-6}$, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $R_э = 6378$ *км*:

$$\dot{\Omega} \approx -10 \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \cos\gamma \text{ град/сут.} \tag{14}$$

Аналогичным образом можно упростить формулу (11): угловую скорость $\dot{\omega}$ движения перицентра спутника можно вычислять по следующей приближенной формуле:

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{4} J_2 \sqrt{\frac{K}{R_э^3}} \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} (5\cos^2\gamma - 1) \text{ рад/сек.} \tag{15}$$

Для спутников Земли (при $\varepsilon < 0{,}1$)

$$\dot{\omega} \approx 5 \left(\frac{R_э}{a}\right)^{7/2} (5\cos^2\gamma - 1) \text{ град/сут.} \tag{16}$$

Из формул (10), (12) видно, что сжатие планеты вызывает вращение восходящего узла орбиты в направлении, противоположном направлению вращения спутника. В течение небольших промежутков времени (в случае близких спутников Земли — до нескольких суток) это вращение можно считать равномерным.

Это вращение происходит тем быстрее, чем меньше наклон плоскости орбиты к плоскости экватора. Для спутника, проходящего через оба полюса планеты, восходящий узел, а вместе с ним и вся плоскость орбиты практически не вращаются вокруг оси планеты. Для спутников, близких к экваториальным, это вращение происходит наиболее быстро; для почти экваториального спутника Земли эта скорость может составить около 9° в сутки. Для первых советских спутников Земли плоскость орбиты вращалась вокруг оси Земли примерно со скоростью 4° в сутки.

Формулы (11) и (15) показывают, что перицентр спутника, а вместе с ним и ось орбиты спутника вращаются в плоскости орбиты практически равномерно. Это вращение будет происходить в том же направлении, что и движение спутника, если $5\cos^2\gamma - 1 > 0$, то есть $\gamma < 63{,}4°$, и в противоположном направлении, если $\gamma > 63{,}4°$. При критическом значении $\gamma = 63{,}4°$ перицентр практически вращаться не будет. Если γ близко к 63,4° (для первых совет-

ских спутников Земли $\gamma \approx 65°$), то перицентр будет поворачиваться медленно. Например, при $\gamma = 65°$ перицентр будет перемещаться против движения спутника со скоростью 0,4° за сутки. В случае спутников, у которых орбиты близки к плоскости экватора, величина $\dot{\omega}$ может достигать 17° за сутки. В обратном направлении предельное возможное значение $\dot{\omega}$ составляет примерно $-4,5°$ за сутки (при $\gamma = 90°$). Такая картина имела место, например, для американского полярного спутника «Дискаверер-2» ($\gamma = 89,9°$, $p / R_э = 1,046$, $\dot{\omega} = -4,3$ *град/сут*).

Из формул (10) и (11) видно, что чем больше среднее расстояние (a) спутника от центра планеты, тем меньше $d\Omega/dN$ и $d\omega/dN$, то есть тем медленнее будут вращаться плоскость орбиты и большая полуось орбиты. Наличие в формулах (12) и (15) сомножителя $(R_э/a)^{7/2}$ показывает, что $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ быстро убывают при увеличении среднего расстояния спутника от центра планеты.

Если воспользоваться равенством $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi)$ и приближенной формулой $(1 + x)^{-3,5} \approx 1 - 3,5x$, верной для малых x, то для низколетящих спутников Земли можно из (14) и (16) получить такие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Omega} &\approx -10\left(1 - \frac{7}{4}\frac{H_\alpha + H_\pi}{R}\right)\cos\gamma \textit{ град/сут}, \\ \dot{\omega} &\approx 5\left(1 - \frac{7}{4}\frac{H_\alpha + H_\pi}{R}\right)(5\cos^2\gamma - 1) \textit{ град/сут}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Приведенные выше формулы (10) и (11) показывают, что сжатие планеты приводит к значительным изменениям *положения* орбиты близкого спутника планеты; однако сжатие *практически не сказывается на форме и размерах орбиты.*

Что касается элементов орбиты γ, p, ε, τ, то для выяснения скорости их изменения за каждый оборот необходимо воспользоваться более точными формулами для потенциала планеты; этого можно достигнуть, например, оставляя в формуле (1.3.5) еще один или несколько членов, кроме первых двух. Подробное исследование показывает, что наклонение орбиты претерпевает в некоторых случаях

хоть и небольшие, но вполне заметные изменения; в частности, для второго советского искусственного спутника Земли γ уменьшалось в ноябре 1957 года ежесуточно примерно на 0,002°. Используя более точные формулы для потенциала планеты, можно также детальнее изучить изменение величин $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

Задачи

1. Орбита американского спутника Земли «Авангард-1», запущенного в марте 1958 года, была наклонена к плоскости экватора под углом 34,3°. Его минимальная высота составляла 660 *км*, а максимальная — 3970 *км*. Аргумент перигея в полдень 17 марта 1958 года был равен 129°. Учитывая из факторов, возмущающих движение спутника, лишь сжатие Земли, дайте прогноз, каким примерно должен был оказаться аргумент перигея 12 марта 1959 года.

2. Средняя высота спутника над поверхностью Земли равна 500 *км*; орбита наклонена к плоскости экватора под углом в 45°. Определите скорость вращения плоскости орбиты и скорость вращения перигея.

3. Американский спутник «Эксплорер-7» (1959) имел в октябре — ноябре 1959 года следующие элементы орбиты: $a = 7200$ *км*, $\varepsilon = 0{,}038$, $\gamma = 50{,}33°$. Подсчитайте, какими были (в среднем) в течение этого времени $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

4. В течение первых двух месяцев после запуска второго советского путника (1957 год) его орбита имела следующие элементы:

$$\frac{a}{R_э} = 1{,}13, \quad \varepsilon = 0{,}09, \quad \gamma = 65{,}3°.$$

С какой угловой скоростью вращалась в течение этого времени плоскость орбиты спутника вокруг земной оси? Какова была средняя угловая скорость вращения перигея орбиты?

§ 3. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

1. Движение спутника Земли происходит в таких областях пространства, где плотность среды в миллиарды раз меньше плотности атмосферы у поверхности Земли. Так, например, плотность атмосферы на высоте 240 *км* меньше плотности атмосферы на уровне моря в 10^{10} раз, а на высоте 360 *км* — в 10^{11} раз. Однако длительное торможение низко летящего спутника в разреженной атмосфере приводит к постоянно накапливающимся изменениям некоторых параметров его орбиты.

В этом параграфе мы изучим движение спутника под действием двух сил: притяжения *сферической* планеты и сопротивления атмосферы; сжатием планеты будем пренебрегать.

Пусть спутник имеет массу m; пусть наибольшее из его сечений, перпендикулярных к направлению движения спутника (так называемое миделево сечение), имеет площадь s; скорость спутника обозначим через v, а плотность атмосферы — через ρ. Тогда величина силы $\boldsymbol{R}$, с которой атмосфера тормозит спутник, может быть вычислена по следующей формуле Ньютона:

$$R = \frac{1}{2} c_x s \rho v^2, \tag{1}$$

где c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления. Направление силы $\boldsymbol{R}$ противоположно вектору скорости спутника.

Вызываемое силой $\boldsymbol{R}$ ускорение имеет величину

$$\Phi = \frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v^2,$$

то есть

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v^2 \left(-\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right) = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v \boldsymbol{v}.$$

Так как

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_1 + v_n \boldsymbol{e}_2$$

(см. § 1), то

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v v_r, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2} c_x \frac{s}{m} \rho v v_n, \; \Phi_3 = 0. \tag{2}$$

Плотность атмосферы ρ меняется с изменением высоты y спутника: $\rho = \rho(y)$. В некоторых работах принимают следующую приближенную формулу для $\rho(y)$:

$$\rho(y) = \rho_1 \frac{x}{\left(1 + \frac{y - y_0}{\alpha}\right)^k}, \tag{3}$$

где $\rho_1 = \mathrm{const}$, а константы x, α, k, y_0 выбираются в зависимости от диапазона высот спутника.

Из формул (2), (8.1.46) и (8.1.47) следует, что $\frac{d\Omega}{du}=0$ и $\frac{d\gamma}{du}=0$, то есть

$$\Omega=\Omega_0=\text{const}, \quad \gamma=\gamma_0=\text{const}. \tag{4}$$

Таким образом, сопротивление атмосферы не приводит к изменению положения плоскости орбиты спутника.

Если учесть формулы (2), (8.1.48) — (8.1.50), то можно формулы для $\dot{p}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\omega}$ привести к виду [8.11]

$$\frac{dp}{du}=-\delta\rho\varphi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{5}$$

$$\frac{d\varepsilon}{du}=-\delta\rho\psi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{6}$$

$$\frac{d\omega}{du}=-\delta\rho\chi(p, \varepsilon, \omega, u), \tag{7}$$

где

$$\varphi=\frac{p^2\sqrt{1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\psi=\frac{p\sqrt{1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\chi=\frac{p\sin\theta\sqrt{1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1+\varepsilon\cos\theta)},$$

$$\delta=c_x\frac{s}{m}, \quad \theta=u-\omega.$$

Для того чтобы избежать решения этой громоздкой системы нелинейных дифференциальных уравнений, применяют метод усреднения, с которым мы уже столкнулись в предыдущем параграфе. Для этого вычисляют средние изменения Δp, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\omega$ элементов p, ε, ω за один полный оборот спутника, то есть при изменении u от 0 до 2π:

$$\Delta p=-\delta\int_0^{2\pi}\rho\varphi(p, \varepsilon, \omega, u)du, \quad \Delta\varepsilon=-\delta\int_0^{2\pi}\rho\psi du,$$

$$\Delta\omega=-\delta\int_0^{2\pi}\rho\chi\, du. \tag{8}$$

При вычислении же этих интегралов рассматривают величины p, ε, ω как постоянные, ибо они за один оборот мало изменяются. Можно показать, что при таких предположениях $\Delta\omega = 0$. Это значит, что постоянно накапливающимися изменениями (вековыми возмущениями) величины ω допустимо в первом приближении пренебречь; иначе говоря, можно считать, что $\omega = \omega_0 = \text{const}$. Вычислив при таком предположении величины Δp и $\Delta\varepsilon$, мы найдем среднее изменение элементов p и ε за один оборот спутника.

Не задерживаясь на обстоятельном изложении новейших результатов, относящихся к влиянию атмосферы и других факторов на движение космического аппарата, рассмотрим здесь еще два любопытных частных результата (при их изложении мы не будем стремиться к большой строгости).

2. «Парадокс спутника». В октябре 1957 года вместе с первым спутником была выведена на околоземную орбиту и его ракета-носитель. Вначале орбиты этих двух тел мало отличались друг от друга и были эллипсами малого эксцентриситета $\varepsilon \approx 0{,}05$. Ракета-носитель, которая была значительно больше по размерам, чем спутник, испытывала и значительно большее торможение. Естественно возникает вопрос: какое из этих двух тел должно было двигаться медленнее — спутник или ракета-носитель? С первого взгляда ответ кажется очевидным: то тело, которое сильнее тормозится атмосферой, то есть ракета-носитель. В действительности же этот ответ ошибочен! На самом деле ракета-носитель значительно опережала спутник и по количеству оборотов вокруг Земли, и по количеству пройденных километров.

Приведенный ниже простой расчет (см. [8.21], [8.22]) показывает, каким образом сказывается влияние сопротивления атмосферы на движение спутника, запущенного на круговую или почти круговую орбиту вокруг Земли.

Пусть спутник P (рис. 8.2) выведен на круговую орбиту вокруг Земли (A — центр Земли). Вследствие торможения атмосферой спутник начнет снижаться и по пологой спиралевидной кривой будет входить в более плотные слои атмосферы. Пусть движение спутника происходит в некоторой плоскости β. Она содержит точку A и вектор $\boldsymbol{v}$ скорости спутника.

В плоскости β выберем прямоугольную систему координат Axy с началом в центре Земли A (рис. 8.2). Будем на β смотреть как на плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть радиус-вектор $\overrightarrow{AP}$ в момент t образует с осью Ax угол φ; $\overrightarrow{PF} = \boldsymbol{v}$, $\angle APN = \frac{\pi}{2}$, $\angle NPF = \alpha$, $\boldsymbol{D}$ — сила торможения спутника атмосферой, $D = |\boldsymbol{D}|$,

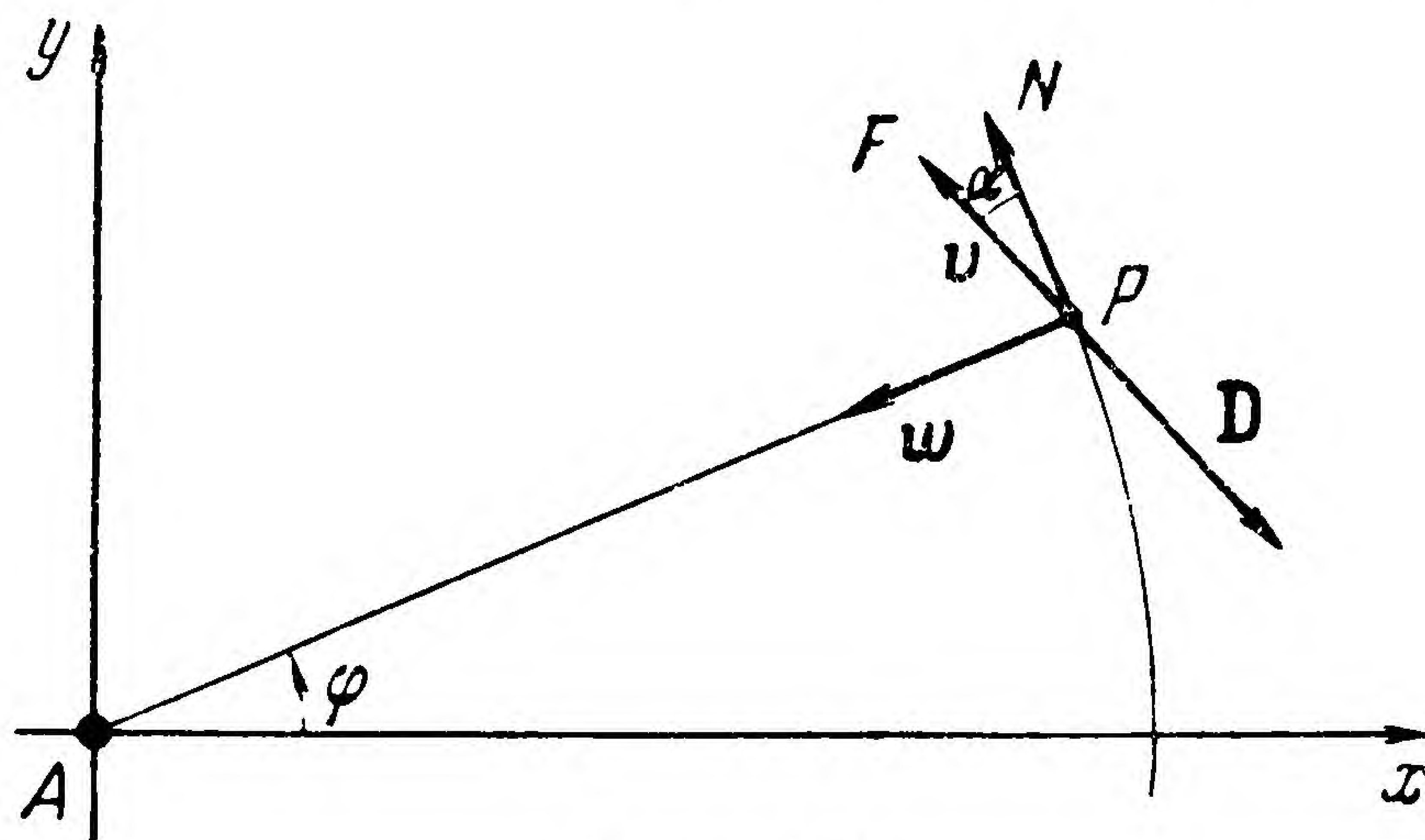


Рис. 8.2.

$\boldsymbol{w}$ — сила тяготения спутника к центру Земли, так что $w = |\boldsymbol{w}| = fMm/r^2$, M — масса Земли, m — масса спутника, $r = AP$. Сила $\boldsymbol{D}$ направлена противоположно вектору скорости $\boldsymbol{v}$, а сила $\boldsymbol{w}$ — вектору $\overrightarrow{AP}$, $v = |\boldsymbol{v}|$.

Согласно второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{D} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{9}$$

Перепишем это равенство в комплексной форме. Для этого заметим *), что

$$\boldsymbol{w} = -we^{i\varphi}, \quad \boldsymbol{D} = De^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\boldsymbol{v} = ve^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{10}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = [\dot{v} + iv(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})]\,e^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{11}$$

*) Напомним, что если некоторый вектор имеет длину ρ и наклонен к оси Ax под углом θ, то он изображается комплексным числом, имеющим такую запись в показательной форме:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Поэтому уравнение (9) принимает вид

$$-we^{i\varphi}+De^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=m\,[\dot{v}+iv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})]\,e^{i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)},$$

или $\left(\text{после умножения на } e^{-i\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

$$-we^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}-D=m\,[\dot{v}+iv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha})], \qquad (12)$$

что равносильно двум вещественным равенствам:

$$w\sin\alpha-D=m\dot{v}, \qquad (13)$$

$$w\cos\alpha=mv(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}). \qquad (14)$$

Выразим $m\dot{v}$ только через w и α, используя равенство (14). Для этого заметим, что

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}(re^{i\varphi})=(\dot{r}+ir\dot{\varphi})\,e^{i\varphi}.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$ve^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\dot{r}+ir\dot{\varphi};$$

поэтому

$$-v\sin\alpha=\dot{r}, \qquad (15)$$

$$v\cos\alpha=r\dot{\varphi}, \qquad (16)$$

то есть

$$\dot{\varphi}=\frac{v\cos\alpha}{r}. \qquad (17)$$

Очевидно, что

$$\dot{\alpha}=\frac{d\alpha}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$

Поэтому из (14) получим:

$$f\frac{Mm}{r^2}\cos\alpha=\frac{mv^2\cos\alpha}{r}\left(1+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right). \qquad (18)$$

Пока сопротивление атмосферы не очень велико, можно считать, что α меняется медленно при вращении спутника

вокруг Земли, то есть допустимо пренебречь величиной $d\alpha/d\varphi$. Тогда из (18) получим приближенное равенство

$$v^2 = f\frac{M}{r}. \tag{19}$$

Используя (15) и (19), можем написать:

$$m\dot{v} = m\frac{dv}{dr}\dot{r} = m\frac{dv}{dr}(-v\sin\alpha) =$$
$$= -\frac{m}{2}\sin\alpha\frac{d(v^2)}{dr} = -\frac{m}{2}\sin\alpha\frac{d}{dr}\left(f\frac{M}{r}\right) = \frac{w}{2}\sin\alpha,$$

то есть

$$m\dot{v} = \frac{1}{2}w\sin\alpha. \tag{20}$$

Теперь из равенства (13) следует:

$$\frac{1}{2}w\sin\alpha = D, \tag{21}$$

или

$$\sin\alpha = 2\frac{D}{w}. \tag{22}$$

Эту формулу мы несколько упростим. Вес P спутника равен $f\frac{Mm}{R^2}$, где R —радиус Земли. Если спутник движется на небольшой высоте (порядка 200—400 *км*), то можно для прикидок считать, что $\frac{r}{R}\approx 1$ (погрешность не превзойдет 12%), и поэтому w допустимо считать равным весу спутника. Угол снижения спутника α будет мал (если отвлечься от последних витков, описываемых спутником перед падением на Землю), так что допустимо считать $\sin\alpha = \alpha$ (α — в радианах!). Поэтому из (22) вытекает такая полезная для ориентировочных прикидок приближенная формула:

$$\alpha = 2\frac{D}{P}, \tag{23}$$

то есть *измеренный в радианах угол α снижения спутника, движущегося по почти круговой орбите, примерно вдвое*

больше отношения атмосферного торможения спутника к его весу.

Из (13) и (21) видно, что

$$m\dot{v} = D. \tag{24}$$

Последняя формула и выражает «*парадокс спутника*»: *Вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает; ускорение в направлении движения оказывается таким же, каким бы оно было, если бы сила лобового сопротивления изменила свое направление на противоположное и толкала бы спутник вперед.*

Отсюда, в частности, следует, что из двух спутников, запущенных на одну и ту же круговую орбиту, быстрее будет двигаться тот, который испытывает большее торможение.

Заметим, что *после вхождения спутника в плотные слои атмосферы* (примерно на высоте порядка 120—100 *км*) угол α снижения спутника растет весьма быстро и уже недопустимо пренебречь производной $d\alpha/d\varphi$, как мы делали в предыдущем расчете. При опускании спутника ниже 100—120 *км* его движение резко отличается от движения на высотах порядка 170—200 *км* и выше. Из-за сильного торможения спутник начинает быстро спускаться в более плотные слои атмосферы. При этом скорость поворота $\dot{\varphi}$ радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$ спутника невелика (по сравнению с $\dot{\alpha}$), и мы получим достаточно правильную качественную картину, если в дальнейших рассуждениях пренебрежем величиной $\dot{\varphi}$. Тогда формула (14) примет вид

$$w \cos\alpha = mv\dot{\alpha},$$

то есть

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{w}{m}\frac{1}{v}\cos\alpha. \tag{25}$$

На высотах ниже 100 *км* допустимо величину w/m считать равной ускорению силы тяжести на поверхности Земли (g), так что (25) можно переписать так:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{g}{v}. \tag{26}$$

Пусть $\overset{\frown}{L_н L_к}$ — дуга, по которой спутник падает на Землю ($L_н$ — начало дуги — предполагается выбранным на высоте до 100—120 *км*, $L_к$ — точка падения на Землю). Интегрируя уравнение (26), найдем

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\alpha_н}^{\alpha_к} = \int_{t_н}^{t_к} \frac{g}{v}\, dt, \tag{27}$$

где $t_н, \alpha_н$ и $t_к, \alpha_к$ относятся соответственно к точкам $L_н$ и $L_к$. Из (27) следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_к}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_н}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{g}{v_{ср}}(t_к - t_н)}, \tag{28}$$

где $v_{ср}$ — скорость спутника в каком-то промежуточном положении на дуге $\overset{\frown}{L_н L_к}$.

Можно показать (и это подтверждается опытом), что спутник падает на Землю со сравнительно небольшой скоростью, которая по меньшей мере в несколько десятков раз меньше его скорости на последних витках вокруг Земли. Величина $v_{ср}$ тоже сравнительно невелика, а величина $\frac{g}{v_{ср}}(t_к - t_н) \gg 1$. Это значит, что угол $\frac{1}{2}\alpha_к + \frac{\pi}{4}$ близок к $\frac{\pi}{2}$, а следовательно, и угол $\alpha_к$ близок к $\frac{\pi}{2}$ (радиан). Иными словами, спутник падает на Землю почти отвесно (в действительности — под углом 60—80° к горизонту).

Не задерживаясь на подробном рассмотрении орбит *большого* эксцентриситета, отметим только, что в этом случае снижение спутника происходит почти исключительно за счет торможения в районе перигея, причем снижение перигея происходит значительно медленнее, чем снижение апогея. Например, если после запуска $h_\alpha = 700$ *км*, $h_\pi = 300$ *км*, то понижение апогея на 100 *км* соответствует снижению перигея лишь на 6 *км* (см. [8.11]). С течением времени вследствие торможения в атмосфере эксцентриситет орбиты спутника будет убывать и станет практически равным нулю в последние сутки, предшествующие крутому падению спутника на Землю.

3. «Срок жизни» спутника. Искусственные спутники Земли, подвергаясь торможению в верхней атмосфере, с течением времени опускаются в более плотные слои воздушного океана и в конце концов сгорают или падают на Землю. После запуска в СССР первого искусственного спутника было опубликовано большое число исследований, в которых изучается возможность предсказания продолжительности существования спутника по данным о его орбите, известным в первые дни его полета.

На продолжительности жизни спутника сказываются многие факторы. Это не только сопротивление верхних слоев атмосферы. Это также сплюснутость Земли, вращение атмосферы, давление солнечных лучей, тяготение спутника к Луне и Солнцу. Благодаря последним двум факторам перигей орбиты спутника совершает периодические колебания, и при опускании перигея в более плотные слои атмосферы испытываемое спутником торможение увеличивается, что приводит к сокращению срока его жизни. Так, например, вследствие воздействия Луны высота перигея американского спутника «Эксплорер-6» менялась каждые 3 месяца в пределах от 250 до 160 *км*; вследствие этого срок жизни этого спутника составил примерно 2 года вместо 20 лет, которые просуществовал бы спутник, если бы воздействие Луны отсутствовало.

Сплюснутость Земли приводит к перемещению перигея орбиты спутника без изменения расстояния от центра Земли. Если, скажем, перигей переместился от полярной области в экваториальную, то теперь он ближе к поверхности Земли и, следовательно, оказывается в более плотной среде, что должно сказаться на сроке жизни спутника.

Что касается самой атмосферы, то ее плотность в какой-либо точке зависит не только от высоты этой точки над уровнем моря, но и от других весьма разнообразных факторов. Так, например, она меняется в течение суток: скажем, на высоте 300 *км* плотность атмосферы в полдень почти вдвое больше, чем в полночь, а на высоте 1000 *км* — вероятно, в 60 раз больше. Плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. До сих пор еще не разработаны достаточно совершенные модели земной атмосферы. Однако имеющиеся сейчас

сведения об атмосфере позволяют дать более или менее удовлетворительные прогнозы срока жизни спутника.

Расскажем здесь вкратце лишь об одном упрощенном приеме [8.23] такого прогнозирования, полезном для ориентировочных прикидок (существуют и более точные методы, см., например, [8.11] и [8.16]).

Мы будем предполагать, что Земля и ее атмосфера имеют сферическую структуру; плотность атмосферы будем считать изменяющейся по экспоненциальному закону, как это обычно делается в учебниках физики (вспомните так называемую «барометрическую формулу»): плотность ρ на высоте h над уровнем моря определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H} \tag{29}$$

(H и ρ_0 — константы).

Будем полагать, что орбита спутника представляет собой эллипс небольшого эксцентриситета ($0{,}02 < \varepsilon < 0{,}2$). Такими были орбиты многих спутников, запущенных в 1957—1964 годах.

Выше мы получили формулы для dp/du и $d\varepsilon/du$. Совершенно аналогично можно получить следующие формулы для $dp/d\theta$ и $d\varepsilon/d\theta$:

$$\frac{dp}{d\theta} = -\delta\rho p^2 \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2},$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -\delta\rho p \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}(\varepsilon + \cos\theta). \tag{30}$$

Пользуясь известными формулами

$$r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

можно после несложных выкладок найти значения для производных $dr_\alpha/d\theta$ и $dr_\pi/d\theta$:

$$\frac{dr_\alpha}{d\theta} = -\delta\rho r_\alpha^2 \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}(1 + \cos\theta), \tag{31}$$

$$\frac{dr_\pi}{d\theta} = -\delta\rho r_\pi^2 \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}}(1 - \cos\theta). \tag{32}$$

Уравнение орбиты спутника

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \qquad (33)$$

можно в силу малости ε заменить таким:

$$r = p\,(1 - \varepsilon \cos \theta), \qquad (34)$$

ибо

$$(1 + \varepsilon \cos \theta)\,(1 - \varepsilon \cos \theta) = 1 - \varepsilon^2 \cos \theta \approx 1.$$

Пусть R — радиус Земли, h_π и h_α — высоты перигея и апогея орбиты спутника над поверхностью Земли. Так как $r = R + h$ и при $\theta = 0$ $r = r_\pi = R + h_\pi$, а при $\theta = \pi$ $r = r_\alpha = R + h_\alpha$, то уравнение (34) можно записать так:

$$h = h_\pi + c\,(1 - \cos \theta), \qquad (35)$$

где

$$c = \frac{1}{2}(r_\alpha - r_\pi) = \frac{1}{2}(h_\alpha - h_\pi) = \varepsilon a. \qquad (36)$$

Обозначим h_π/H через z, так что $h_\pi = Hz$. Используя уже применявшийся нами прием усреднения, подсчитаем изменение величин r_π и c за один полный оборот спутника (то есть при изменении θ от $-\pi$ до π); при этом в нашем упрощенном расчете мы в подынтегральном выражении заменим суммы вида $1 + \varepsilon\varphi\,(\theta)$ через 1. В результате получим

$$\Delta r_\pi = H \Delta z = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho\,(1 - \cos \theta)\,d\theta, \qquad (37)$$

$$\Delta c = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos \theta\, d\theta, \qquad (38)$$

где A — некоторая положительная константа, а ρ определяется формулой (29).

Точное вычисление указанных интегралов несколько кропотливо и требует привлечения так называемых бесселевых функций. Для упрощения расчета воспользуемся следующими соображениями. Так как орбита не является круговой ($\varepsilon > 0{,}02$), то снижение спутника происходит главным образом за счет его торможения в районе перигея, где

плотность больше, чем в других точках орбиты. Это значит, что в интеграле (37) можно пределы интегрирования заменить на $-\alpha$ и α, где α — малое положительное число (например, $\alpha = 1$). При $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$ допустимо воспользоваться известной приближенной формулой

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2. \qquad (39)$$

Из (35) получим

$$h \approx zH + \frac{1}{2}c\theta^2.$$

В результате подынтегральное выражение в (37) приобретает такой вид:

$$\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\frac{1}{2}c\theta^2/H}\, e^{-z}.$$

Функция $e^{-\frac{c\theta^2}{2H}}$ убывает очень быстро при росте θ. Поэтому интеграл от этой функции в пределах от $-\alpha$ до α не будет сильно отличаться от интеграла от той же функции в пределах от $-\infty$ до ∞. А при вычислении последнего интеграла можно воспользоваться известным тождеством

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Выполнение этих выкладок приведет к следующему приближенному равенству ($C_1 = A\rho_0$)

$$H\Delta z = -C_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\theta^2 e^{-\frac{c\theta^2}{2H}-z}d\theta = -\frac{C_1}{4}\pi^{\frac{1}{2}}(c/2H)^{-\frac{3}{2}}e^{-z}.$$

Разделив $H\Delta z$ на период T обращения спутника $\left(T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}a^{3/2}\right)$, найдем Hdz/dt, а затем $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = -C_2 c^{-\frac{3}{2}}e^{-z}, \qquad (40)$$

где C_2 — положительная константа.

Аналогично можно вычислить dc/dt:

$$\frac{dc}{dt} = -2C_2 c^{-\frac{1}{2}} e^{-z}. \tag{41}$$

Из последних двух уравнений нетрудно найти c как функцию от t. Действительно, разделив почленно (41) на (40), получим:

$$\frac{dc}{dz} = 2c, \; c = C_3 e^{2z}, \; e^{-z} = C_4 c^{-\frac{1}{2}}.$$

Учитывая (41), найдем

$$\frac{dc}{dt} = -C_5 c^{-1},$$

$$c = C_6 (t_0 - t)^{1/2}, \tag{42}$$

где C_3, C_4, C_5, C_6 и t_0 — константы, $C_6 > 0$. При $t \to t_0$ $c \to 0$, то есть орбита приближается к окружности.

Для реальных спутников, орбиты которых имеют перигей на высоте порядка 200—300 *км* и эксцентриситет $\varepsilon > 0{,}02$, снижение эксцентриситета до 0,001—0,002 практически совпадает (с точностью до одних-двух суток) с моментом прекращения существования спутника. Поэтому момент t_0 и можно без большой погрешности считать моментом прекращения существования спутника.

Для нахождения t_0 можно воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} a^3,$$

откуда

$$2\frac{dT}{T} = 3\frac{da}{a}, \; \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{2}{3}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}. \tag{43}$$

Легко понять, что при принятых нами допущениях и при той точности, которая допустима в данном рассуждении, можно считать

$$\frac{dc}{dt} = \frac{da}{dt}. \tag{44}$$

Действительно,

$$a = \frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi),\ c = \frac{1}{2}(r_\alpha - r_\pi).$$

В течение одного оборота спутника снижение перигея во много раз меньше снижения апогея, так что

$$\Delta r_\pi \approx 0,\ \Delta a \approx \frac{1}{2}\Delta r_\alpha,\ \Delta c \approx \frac{1}{2}\Delta r_\alpha,\ \frac{\Delta c}{T} \approx \frac{\Delta a}{T}, \tag{45}$$

а это равносильно (44). Из (42) и (44) видно, что

$$t_0 - t = -\frac{c}{2dc/dt} = -\frac{c}{2da/dt} = \frac{3}{4a}\frac{cT}{(-dT/dt)},$$

или окончательно

$$t_0 - t = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon T}{(-dT/dt)}, \tag{46}$$

$$t_0 - t = \frac{3}{8}\frac{h_\alpha - h_\pi}{a}\frac{T}{(-dT/dt)}. \tag{47}$$

Эти формулы и позволяют вычислить оставшийся срок жизни спутника, если, помимо обычно публикуемых сведений об орбите, известна еще быстрота уменьшения периода обращения спутника $(-dT/dt)$.

Для спутников, чьи орбиты удовлетворяют требованиям:

$$0{,}02 < \varepsilon < 0{,}2 \text{ и } 180\ \textit{км} < h_\pi < 400\ \textit{км},$$

формулы (45) — (47) дают правильный ответ с погрешностью порядка 10%.

Приведем пример: 9 ноября 1957 года перигей первого искусственного спутника находился на высоте 210 *км*, апогей — на высоте 810 *км*. Быстрота уменьшения периода обращения спутника составляла 2,94 секунды за сутки. Легко подсчитать, что $a = 6880$ *км*, $T = 5610$ *сек*.

По формуле (47) получим

$$t_0 - t = \frac{3}{8}\frac{810 - 210}{6880}\frac{5610}{2{,}94} \approx 60\ \textit{сут}.$$

Итак, через 60 суток после 9 ноября, то есть примерно 8 января 1958 года, должно было прекратиться существова-

ние спутника (в действительности спутник упал на Землю 4 января 1958 года).

Отметим еще, что рассуждениями, весьма сходными с ранее приведенными, можно получить другую формулу, весьма удобную для грубых прикидок [8.19]: если h_α и h_π — высоты апогея и перигея орбиты спутника, $-dh_\alpha/dt$ — быстрота снижения апогея (за сутки), S — оставшееся время существования спутника (в сутках), то

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{h_\alpha - h_\pi}{(-dh_\alpha/dt)}\,. \qquad (48)$$

При тех же предположениях, что и выше, ответ, даваемый формулой (48), может, по-видимому, содержать погрешность порядка 25%.

Например, если сейчас для какого-нибудь спутника $h_\alpha = 600$ *км*, $h_\pi = 250$ *км* и апогей снижается на 3,5 *км* в сутки, то оставшийся срок жизни спутника составляет примерно

$$\frac{600-250}{2\cdot 3{,}5} = 50\,\textit{сут.}$$

Задачи

1. Период обращения первого советского спутника в начале октября 1957 года составлял около 96 *мин* и убывал примерно на 3 *сек* за сутки. На сколько примерно убывала ежесуточно большая полуось орбиты?

2. По данным, опубликованным в печати, 9 ноября 1957 года ракета-носитель первого искусственного спутника имела перигей на высоте 210 *км*, а апогей на высоте 695 *км*. Суточное уменьшение периода обращения составляло 6,3 *сек* в сутки. Дайте прогноз вероятной даты падения этой ракеты на Землю. Сравните с точной датой падения ракеты.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1. Солнце притягивает Луну примерно вдвое сильнее, чем Земля.

2. $U = f\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right)$.

§ 2

1. Материальная точка (P, M) притягивается сильнее к гантели, чем к материальной точке $(O, 2m)$.

2. Пусть $2a$ — длина стержня, δ — его линейная плотность, m — масса шарика P. Примем за начало координат середину O стержня (рис. 1.7). Пуэть $OP = R > a$. Подсчитаем потенциал dU на точку P, который создает элемент стержня dx:

$$dU = f\frac{\delta dx}{R - x}.$$

Потенциал, создаваемый всем стержнем на точку P, равен

$$U = \int_{-a}^{a} f\delta \frac{dx}{R - x} = f\delta\,[\ln(R + a) - \ln(R - a)].$$

Такому потенциалу соответствует сила

$$F_1 = \frac{dU}{dR} = f\delta\left(\frac{1}{R + a} - \frac{1}{R - a}\right) = -f\delta\,\frac{2a}{R^2 - a^2}.$$

Стержень притягивает точку (P, m) с силой

$$F = mF_1 = mf\delta\frac{2a}{R^2 - a^2}.$$

Если бы мы всю массу M стержня сосредоточили в его середине O, то образовавшаяся материальная точка (O, M) притягивала бы шарик (P, m) с силой

$$\Phi = \frac{fMm}{R^2} = \frac{2fm\delta a}{R^2}.$$

Ясно, что $F > \Phi$. Итак, стержень AB притягивает шарик (P, m) сильнее, чем точка (O, M). Силу F можно было бы, конечно, подсчитать непосредственно, не прибегая к предварительному вычислению

потенциала U:

$$F = \int_{-a}^{a} \frac{fm\delta dx}{(R-x)^2}.$$

3. Подсчет потенциала сферы радиуса R, массы M и поверхностной плотности δ на точку P, находящуюся на расстоянии r от центра сферы, приводит к формуле

$$U = f\frac{2\pi\delta R^2}{rR}\left[(r+R) - |r-R|\right] = f\frac{M}{2rR}\left[(r+R) - |r-R|\right].$$

Рассмотрим два случая: $r > R$ и $r < R$.

1) $r > R$. Тогда $U = f\frac{M}{r}$. В точности такой же потенциал на точку P создает материальная точка (O, M). А это значит, что сфера притягивает внешнюю точку $(P, 1)$ с такой же силой, с какой точку P притягивает точка (O, M).

2) $r < R$. Тогда $U = f\frac{M}{R} = \text{const}$. Это значит, что сфера совсем не притягивает точку $(P, 1)$, если последняя лежит внутри сферы (равнодействующая сил, с которыми частицы сферы притягивают точку $(P, 1)$, равна нулю).

4. Если точка P лежит внутри сферы радиуса ρ $(OP = r < \rho)$ и t определяется по формуле (1.2.3), то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{t}\, d\varphi = \frac{2}{\rho}.$$

Воспользовавшись этим равенством, можно показать, что $U = \text{const}$, т. е. результирующая сила, с которой полый шар действует на материальную точку P, лежащую внутри его полости, равна нулю.

5. Четыре материальные точки (A_k, M) притягивают точку (P, m) приблизительно на 10% слабее, чем материальная точка $(O, 4M)$.

ГЛАВА II

§ 1

1. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то каждое тело вблизи экватора при падении на Землю имело бы некоторое ускорение свободного падения g_0. Из-за вращения Земли вокруг оси это тело получает центробежное ускорение $a_ц = \omega^2 R_з$, где ω — это угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси. Так как Земля делает полный

оборот вокруг своей оси («относительно неподвижных звезд») за 86 164 *сек*, то

$$a_ц = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 \cdot 6378{,}2\cdot 10^3 \approx 0{,}0339 \text{ м/сек}^2.$$

Наблюдаемое на экваторе ускорение свободного падения $g_э$ есть разность между ускорением g_0 свободного падения относительно невращающейся Земли и центробежным ускорением $a_ц$: $g_э = g_0 - a_ц$, откуда $g_0 = g_э - a_ц \approx 9{,}8143$ *м/сек*². Пусть над экватором, на расстоянии 6378,2 *км* от центра Земли, помещена масса m. Сила F, с которой эта масса притягивается к Земле, равна mg_0. Если бы Земля была идеальным шаром со сферическим распределением плотности, то эта сила не изменилась бы, если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре. Из-за сплюснутости Земли эта сила изменится, но изменение будет незначительным и им можно пренебречь. Поэтому допустимо считать, что $F = fmM_з/R_э^2 = mg_0$. Следовательно, $K_з = fM_з = g_0R_э^2 = 10^{-3}\cdot 9{,}8143 \times$ $\times (6378{,}2)^2 = 398\,600$ *км*³/*сек*².

2. $K_ю = K_з \dfrac{M_ю}{M_з} = 126{,}5\cdot 10^6$ *км*³/*сек*².

§ 3

1. Обозначим через m массу ракеты, через K — гравитационный параметр планеты. Тогда $Km/R^2 = mg$, откуда $K = gR^2$. Пусть ракета получила у поверхности планеты настолько малую начальную скорость v_0, что она не удалилась в бесконечность, а пришла в точку на высоте H над поверхностью планеты, имея там нулевую скорость. Согласно интегралу энергии

$$v_0^2 - \frac{2K}{R} = -\frac{2K}{R+H},$$

откуда $v_0^2 = \dfrac{2gRH}{R+H}$. При больших H ($H \to \infty$)

$$v_0^2 = \frac{2gR}{\dfrac{R}{H}+1} \approx 2gR;$$

при малых H ($H \to 0$)

$$v_0^2 = \frac{2gH}{\dfrac{R}{H}+1} \approx 2gH.$$

2. $v \approx 11{,}11$ *км/сек*.

§ 4

1. $\sigma_2\dot z - \sigma_3\dot y + K\dfrac{x}{r} = -\lambda_1, \qquad \sigma_3\dot x - \sigma_1\dot z + K\dfrac{y}{r} = -\lambda_2,$

$$\sigma_1\dot y - \sigma_2\dot x + K\frac{z}{r} = -\lambda_3.$$

2. Из (2.4.3), (2.2.1) и (2.3.2) с помощью тождеств

$$\mathbf{r}^2 = r^2, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v} = 0, \ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}), (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

легко получить:

$$\lambda^2 = \boldsymbol{\lambda}^2 = K^2 + \frac{2K}{r}\,\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{v})^2 =$$
$$= K^2 + 2\frac{K}{r}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{v}^2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v})^2 =$$
$$= K^2 - 2\frac{K}{r}\sigma^2 + \sigma^2 v^2 = K^2 + h\sigma^2.$$

§ 5

1. Плутон подходит к Солнцу ближе, чем Нептун, примерно на 0,2 а. е. (около трех миллионов километров).

2. $r_\alpha = 152\cdot 10^6$ *км*, $r_\pi = 147\cdot 10^6$ *км*.

3. Пусть $A'\Pi$ (рис. Р.1) — линия апсид орбиты спутника, CD — линия встречи плоскости орбиты с плоскостью экватора. В течение одного оборота спутник проходит над северным полушарием дугу $\overset{\frown}{C\Pi D}$, а над южным — дугу $\overset{\frown}{DA'C}$.

Пусть C' и D' — точки, соответственно симметричные точкам C и D относительно прямой $A'\Pi$.

$$\overset{\frown}{C\Pi D} = \overset{\frown}{C\Pi C'} + \overset{\frown}{C'D},$$

$$\overset{\frown}{DA'C} = \overset{\frown}{DA'D'} + \overset{\frown}{D'C}.$$

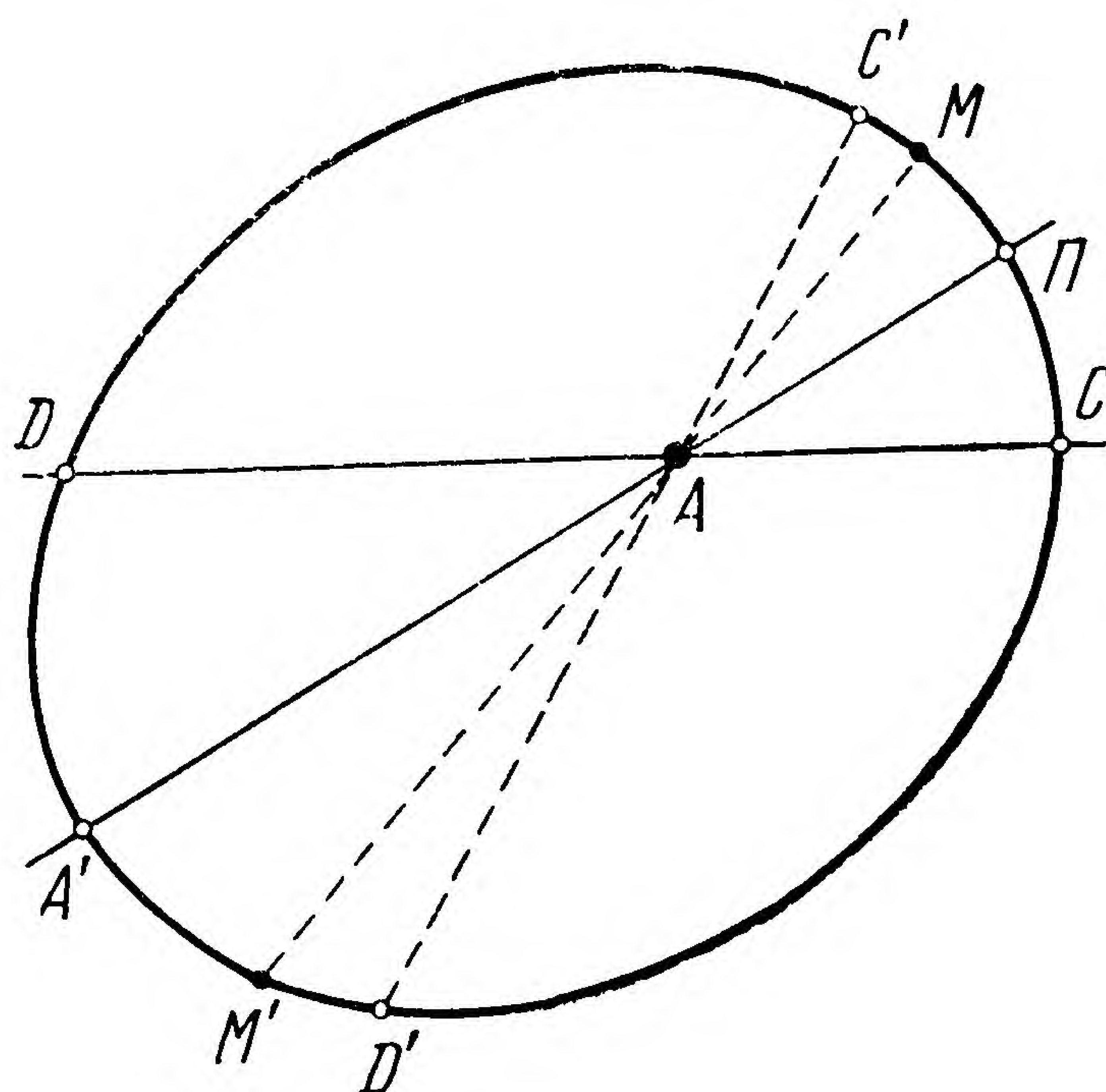


Рис. Р.1.

Пусть M — произвольная точка дуги $\overset{\frown}{C\Pi C'}$, M' — точка на дуге $\overset{\frown}{DA'D'}$, в которой эту дугу пересекает прямая MA. Обозначим истинные аномалии точек M и M' через θ и θ'. Ясно, что $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\cos\theta > 0$. Но $\theta' = \theta + \pi$, так что $\cos\theta' = -\cos\theta < 0$. Мы имеем:

$$AM = p/(1+\varepsilon\cos\theta), \quad AM' = p/(1+\varepsilon\cos\theta') = p/(1-\varepsilon\cos\theta).$$

Отсюда видно, что $AM' > AM$. Но из интеграла энергии (2.3.2) ясно, что чем дальше спутник от центра Земли, тем его скорость меньше.

Поэтому в любой точке M дуги $\overset{\frown}{СПС'}$ спутник движется быстрее, чем в соответствующей ей точке M' дуги $\overset{\frown}{DA'D'}$. Следовательно, и всю дугу $\overset{\frown}{СПС'}$ спутник проходит быстрее, чем дугу $\overset{\frown}{DA'D'}$.

Что же касается дуг $\overset{\frown}{C'D}$ и $\overset{\frown}{D'C}$, то ввиду их симметрии относительно линии апсид $A'П$ спутник проходит их за одинаковые промежутки времени. Теперь ясно, что дугу $\overset{\frown}{СПD}$ спутник проходит быстрее, чем дугу $\overset{\frown}{DA'C}$. Спутник находился дольше над южным полушарием, чем над северным.

§ 6

2. 1,8 *км/сек.*

3. Обозначим через K гравитационный параметр Солнца. В момент t_0

$$v_r = v_0 \sin\alpha = \frac{K}{\sigma}\varepsilon\sin\theta_0,\quad \sigma = v_0 r_0\cos\alpha.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$v_0\sin\alpha = \frac{K\,\varepsilon\sin\theta_0}{v_0 r_0\cos\alpha}. \qquad \text{(I)}$$

Из уравнения орбиты корабля найдем, что

$$1+\varepsilon\cos\theta_0 = \frac{p}{r_0} = \frac{\sigma^2}{Kr_0} = \frac{r_0 v_0^2\cos^2\alpha}{K}. \qquad \text{(II)}$$

Из (I) и (II) можем найти $\varepsilon\sin\theta_0$ и $\varepsilon\cos\theta_0$:

$$\varepsilon\sin\theta_0 = (r_0v_0^2/K)\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \text{(III)}$$

$$\varepsilon\cos\theta_0 = (r_0v_0^2/K)\cos^2\alpha - 1. \qquad \text{(IV)}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1}{2}\,\frac{(r_0v_0^2/K)\sin 2\alpha}{(r_0v_0^2/K)\cos^2\alpha - 1}. \qquad \text{V)}$$

Полученная формула позволяет вычислить истинную аномалию корабля в момент t_0. Возводя равенства (III) и (IV) почленно в квадрат и складывая их, найдем после несложных преобразований:

$$\varepsilon^2 = [(r_0v_0^2/K) - 1]^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha. \qquad \text{(VI)}$$

Кроме того,

$$p = \sigma^2/K = v_0^2 r_0^2\cos^2\alpha/K. \qquad \text{(VII)}$$

Затем r_π легко вычислить по формуле $r_\pi = p/(1+\varepsilon)$.

4. Величину γ можно выразить через r и через величины θ_0, p, ε, найденные при решении предыдущей задачи. Приведем здесь и другое решение, не опирающееся на задачу 3:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\theta_0 + \gamma) = 1 - \cos\gamma + (1 + \varepsilon\cos\theta_0) \times$$
$$\times \left(\cos\gamma - \frac{\varepsilon\sin\theta_0}{1 + \varepsilon\cdot\cos\theta_0}\sin\gamma\right).$$

Но в момент t_0

$$v_r = \frac{\sigma}{p}\varepsilon\sin\theta_0, \quad v_n = \frac{\sigma}{p}(1 + \varepsilon\cos\theta_0),$$

так что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_r}{v_n} = \frac{\varepsilon\sin\theta_0}{1 + \varepsilon\cos\theta_0}.$$

Кроме того, из равенства

$$r_0 = p/(1 - \varepsilon\cos\theta_0)$$

следует, что

$$1 + \varepsilon\cos\theta_0 = p/r_0.$$

Поэтому

$$\frac{p}{r} = 1 - \cos\gamma + \frac{p}{r_0}(\cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma).$$

Из последнего равенства находим

$$\left(1 - \frac{r_0}{p}\right)\cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma = \frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{p}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь

$$p = v_0 r_0^2 \cos^2\alpha / K. \qquad \text{(II)}$$

Решив тригонометрическое уравнение (I), найдем γ.

5. Полагая в формулах (I) и (II) из решения задачи 4 $r_0 = R_З$, $r = R_В$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, получим

$$\frac{R_З}{R_В} = \frac{K}{v_0^2 R_З \cos^2\alpha}(1 - \cos\gamma) + \cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma.$$

Определяя отсюда v_0^2, имеем

$$v_0^2 = \frac{2K(1 - \cos\gamma)}{R_З[A(1 + \cos 2\alpha) + B\sin 2\alpha]},$$

где

$$A = \frac{R_З}{R_В} - \cos\gamma, \quad B = \sin\gamma.$$

Можно выбрать угол λ так, чтобы

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\lambda, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\lambda \quad (-\pi<\lambda\leqslant\pi).$$

Тогда

$$v_0^2=\frac{2K(1-\cos\gamma)}{R_З\left[A+\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\alpha-\lambda)\right]}.$$

Отсюда следует, что v_0 принимает минимальное значение

$$v_0=\sqrt{\frac{2K(1-\cos\gamma)}{R_З(A+\sqrt{A^2+B^2})}}$$

при $\alpha=\frac{1}{2}\lambda$ $\left(\text{то есть } \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)$.

§ 7

1. $v_{кр}=29{,}8$ *км/сек*, $v_{пар}=42{,}1$ *км/сек*.

2. Пусть H — высота суточного спутника над поверхностью Земли, v — его скорость, R — радиус Земли. Земля делает один полный оборот вокруг своей оси за 86 164 *сек*. Следовательно, средняя угловая скорость вращения Земли равна $2\pi/86164$ *рад*. Такую же угловую скорость должен иметь суточный спутник, то есть

$$\frac{v}{R+H}=\frac{2\pi}{86164}.$$

Но $v=\sqrt{K_З/(R+H)}$. Поэтому $\sqrt{K_З/(R+H^3)}=2\pi/86164$. Отсюда можно найти $R+H$, а затем H: $H\approx 35\,800$ *км*.

3. $h=v^2-\frac{2K}{r}=2{,}31^2-\frac{2\cdot 398\,600}{320\,000}>0$. Поэтому траектория ракеты — гиперболическая.

4. $v_{кр}=\sqrt{\frac{r_0}{60r_0}}\,v_{\rm I}\approx 1{,}02$ *км/сек*,

$$v_{пар}=v_{кр}\sqrt{2}\approx 1{,}02\cdot 1{,}41\approx 1{,}43 \text{ км/сек}.$$

5. Средний радиус Луны $r_Л=1738$ *км*. Пусть $m_З$ и $m_Л$ — массы Земли и Луны, $r_З$ — радиус Земли, $v_{\rm I Л}$ и $v_{\rm I З}$ — значения первой космической скорости для Луны и для Земли.

$$v_{\rm I Л}=\sqrt{\frac{fm_З}{r_З}}\sqrt{\frac{m_Л}{m_З}\,\frac{r_З}{r_Л}}=v_{\rm I З}\sqrt{\frac{1}{81{,}4}\,\frac{6370}{1740}}\approx 1{,}7 \text{ км/сек}.$$

Вторая космическая скорость относительно Луны равна

$$v_{\rm II Л}=v_{\rm I Л}\sqrt{2}\approx 2{,}4 \text{ км/сек}.$$

§ 9

1. При помощи интеграла энергии (2.9.4) и правила рычага можно найти

$$v_\alpha = \frac{v_\pi r_\pi}{r_\alpha} = \frac{2K - r_\pi v_\pi^2}{v_\pi r_\pi}.$$

2. $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{K}{a}} = 29{,}8$ *км/сек*,

$$v_\pi^2 = \frac{K}{a}\frac{r_\alpha}{r_\pi} = \frac{K}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx \frac{K}{a}(1+2\varepsilon) \text{ при малых } \varepsilon.$$

Отсюда $v_\pi \approx v_{\text{ср}}(1+\varepsilon)$. Аналогично получаем $v_\alpha \approx v_{\text{ср}}(1-\varepsilon)$.

$$v_\pi \approx 30{,}3 \text{ км/сек}, \ v_\alpha \approx 29{,}3 \text{ км/сек}.$$

3. Пусть A — центр Земли, B и C — апогей и перигей лунной орбиты, $a_Л$ и $\varepsilon_Л$ — большая полуось и эксцентриситет.

$$AB = a_Л(1+\varepsilon_Л) \approx 405\,000 \text{ км},$$

$$AC = a_Л(1-\varepsilon_Л) \approx 363\,000 \text{ км}.$$

Рассмотрим сначала полет к точке B. Пусть $П$ — перигей орбиты космолета. $r_\pi = AП = 6370 + 230 = 6600$ *км*. Большая полуось орбиты космолета равна

$$a = \frac{AB + AП}{2} \approx 206 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Начальная скорость космолета (в перигее $П$ его орбиты) определяется из формулы

$$v_\pi^2 = K_З\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right).$$

Отсюда получим $v_\pi \approx 10{,}9$ *км/сек*. Аналогично можно вычислить скорость v_π, необходимую космолету для попадания в Луну в перигее ее орбиты.

4. В этом случае $r = a$ и по формуле (2.8.2)

$$v = \sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{K}{r}} = v_{\text{кр}}.$$

5. Пусть R — радиус Земли, K — гравитационный параметр Земли, $r_\alpha = R + H$, $2a = r_\alpha + r_\pi$.

Начальная скорость v_α определяется равенством

$$v_\alpha^2 = K\left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2K}{r_\alpha}\,\frac{r_\pi}{2a} = \frac{2K}{R+H}\,\frac{r_\pi}{R+H+r_\pi} = \\ = \frac{2K}{R+H}\left(1 - \frac{R+H}{R+H+r_\pi}\right).$$

Но по условию должно быть $r_\pi \geqslant R+h$, откуда

$$R+H+r_\pi \geqslant R+H+h.$$

Поэтому

$$\frac{R+H}{R+H+r_\pi} \leqslant \frac{R+H}{2R+H+h},$$

$$v_\alpha^2 \geqslant \frac{2K}{R+H}\left(1 - \frac{R+H}{2R+H+h}\right)$$

или

$$v_\alpha \geqslant \sqrt{\frac{2K}{2R+H+h}\cdot\frac{R+h}{R+H}}.$$

6. Из рис. 2.10 ясно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{ОП}{ПВ}$$

(здесь $\frac{1}{2}\varphi$ есть $\angle AOB$). Но $ПВ = AD = d$, $ОП = |a|$. Кроме того, $v_\infty^2 = h = \frac{K}{|a|}$, так что $|a| = \frac{K}{v_\infty^2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} = \frac{K}{v_\infty^2 d}$.

7. Из интеграла энергии и интеграла площадей имеем:

$$v_\alpha^2 - \frac{2K}{d} = v^2 - \frac{2K}{R}, \quad v_\alpha d = Rv\sin\varphi.$$

Отсюда находим:

$$v^2 = \frac{2Kd\,(d-R)}{R\,(d^2 - R^2\sin\varphi)}.$$

Так как $v^2 = K\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$, то легко вычислить a:

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 - R^2\sin^2\varphi}{d - R\sin^2\varphi}.$$

Эксцентриситет после этого находится при помощи соотношения $d = a\,(1+\varepsilon)$.

8. Задачу можно решить тем же способом, что и предыдущую.

9. Пусть в момент старта АМС ее скорость была равна v, а местная параболическая скорость — $v_{\text{пар}}$. Константа энергии h может быть найдена по формуле

$$h = v_0^2 - \frac{2K_З}{r_0} = 4{,}05^2 - \frac{2\cdot 398\,600}{488\,900 + 6400} \approx 14{,}8.$$

Так как $h > 0$, то движение АМС проходило по гиперболе. В силу формулы (2.7.11)

$$v^2 - v_{пар}^2 = h.$$

По условию $v - v_{пар} = d$. Отсюда $v + v_{пар} = h/d$, и поэтому

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d} + d\right);$$

$$v_{пар} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d} - d\right) \approx 10{,}9 \ км/сек.$$

Если отделение АМС от ракеты произошло на расстоянии r от центра Земли ($r = R + H$, где R — радиус Земли), то

$$v_{пар}^2 = \frac{2K_З}{r}, \quad r = \frac{2K_З}{v_{пар}^2}, \quad H = \frac{2K_З}{v_{пар}^2} - R \approx 380 \ км.$$

Величину $|a|$ главной полуоси АМС найдем из зависимости

$$h = \frac{K_З}{|a|}.$$

10. $v_0^2 = \frac{2K}{r_0} + h = v_{пар}^2 + h = v_{пар}^2 - \frac{K}{a}$. Отсюда

$$a = \frac{K}{v_{пар}^2 - v_0^2}.$$

Если гравитационный параметр K неизвестен, но известно расстояние r_0 спутника от звезды ($AP = r_0$), то можно воспользоваться тем, что $v_{пар}^2 = \frac{2K}{r_0}$, так что

$$K = \frac{1}{2} v_{пар}^2 r_0 \quad и \quad a = \frac{1}{2} \frac{r_0}{1 - \frac{v_0^2}{v_{пар}^2}}.$$

11. $\varepsilon = \frac{v_0^2}{v_{кр}^2} - 1.$

12. 1) Большая полуось не зависит от α, ибо определяется из соотношения $v_0^2 = K\left(\frac{2}{r_0} + \frac{1}{a}\right)$; $r_\pi = a(1 - \varepsilon)$, $r_0 = a(1 - \varepsilon_0)$. Поэтому

$$r_\pi = r_0 \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon_0}. \quad \text{(I)}$$

2) $\varepsilon^2 = 1 + h\dfrac{\sigma^2}{K^2}$, где $\sigma = v_0 r_0 \sin\alpha$, $h = v_0^2 - \dfrac{2K}{r_0}$. Поэтому

$$\varepsilon^2 - 1 = h\,\frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha}{K}.$$

В частности, при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$\varepsilon_0^2 - 1 = h\,\frac{v_0^2\, r_0^2}{K}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 - 1 = (\varepsilon_0^2 - 1)\sin^2\alpha,\quad \varepsilon^2 = 1 + (\varepsilon_0^2 - 1)\sin^2\alpha,$$

то есть

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 + (1 - \varepsilon_0^2)\cos^2\alpha. \qquad \text{(II)}$$

13. Пусть $AC = r$; ε, a, p — эксцентриситет, главная полуось и фокальный параметр орбиты космолета. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{v_n}{v_r}$, то $\operatorname{tg}\varphi = (1 + \varepsilon\cos\theta)/(\varepsilon\sin\theta)$, откуда $\varepsilon = 1/(\operatorname{tg}\varphi\sin\theta - \cos\theta)$. Но $p = \sigma^2/K$, $\sigma = rv\sin\varphi$, так что $p = r^2v^2\sin^2\varphi/K$. Так как $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, то $\cos\theta = \left(\dfrac{p}{r} - 1\right)/\varepsilon$, то есть

$$\cos\theta = \left(\frac{rv^2\sin^2\varphi}{K} - 1\right)/(\operatorname{tg}\varphi\sin\theta - \cos\theta),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\,\frac{rv^2\sin 2\varphi}{rv^2\sin^2\varphi - K} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sin^2\varphi - (v_{\text{кр}}/v)^2},$$

где $v_{\text{кр}}$ — это круговая скорость на расстоянии r от центра звезды A.

14. Частный случай задачи 13: $\varphi = 60°$, $v = 35$ *км/сек*, $v_{\text{кр}} = 30$ *км/сек*. Получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 120°}{\sin^2 60° - \left(\frac{6}{7}\right)^2}.$$

§ 10

1. Пусть M — масса звезды, m — масса спутника, T — период его обращения вокруг звезды, a — большая полуось его орбиты.

Теоретически мыслим случай, когда период T будет меньше T_0. Для этого спутник должен иметь настолько большую массу, чтобы

$$a^3M < (M + m)R^3,$$

то есть чтобы

$$m > M\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right).$$

Однако практически этот случай нереален.

2. $r_\alpha = H_\alpha + R$ (R — радиус Земли), $r_\pi = H_\pi + R$,

$$2a = H_\alpha + H_\pi + 2R, \quad H_\pi = 2(a - R) - H_\alpha,$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K_З}{4\pi^2} = 10\,100 \quad км^3/сек^2, \qquad T = 106 \cdot 60 \quad сек,$$

$$a = \sqrt[3]{10\,100\,(106 \cdot 60)^2} \approx 7420 \quad км.$$

Так как $R \approx 6370$ *км*, $H_\alpha = 1880$ *км*, то $H_\pi \approx 220$ *км*.

4. Пусть A — центр Земли, B — перигей орбиты Луны.

а) Время полета t к перигею Луны.

$AП = 6600$ *км*, $AB = 363\,300$ *км*, $a \approx 185\,000$ *км*. Найдем период обращения T такого снаряда вокруг Земли:

$$\frac{a^3}{T^2} = 10\,100 \quad км/сек^2,$$

$$T = \sqrt{\frac{185\,000^3}{10\,100}} \quad сек \approx 220 \quad час.$$

Следовательно, полет к перигею Луны займет $\frac{T}{2} \approx 110$ *час* $=$ $= 4$ *сут* 14 *час*.

б) Время полета t_α к апогею Луны вычисляется аналогично: $t_\alpha \approx 5$ *сут* 10 *час*.

5. $a = \sqrt[3]{KT^2/4\pi^2} = 40\,700$ *км*, $H_\alpha = 2a - 2R_З - H_\pi \approx 68\,000$ *км*,

$$v_\alpha = \sqrt{K\left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{a}\right)} \approx 0{,}95 \quad км/сек.$$

6. Пусть $M_З$ и $M_Л$ — массы Земли и Луны, $T_Л$ и $T_р$ — периоды обращения Луны и ракеты вокруг Земли. Тогда

$$\frac{T_Л^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M_З + M_Л)}, \qquad \frac{T_р^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM_З}.$$

Поэтому

$$\frac{T_Л}{T_р} = \left(1 + \frac{M_Л}{M_З}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Л}{M_З} < 1.$$

Обозначим через l длину лунной орбиты. За 1 *сек* ракета проходит $\frac{l}{T_р}$ *км*, а Луна $\frac{l}{T_Л}$ *км*, причем $\frac{l}{T_Л} > \frac{l}{T_р}$, ибо $T_р > T_Л$.

Итак, Луна проходит за каждую секунду на $\frac{l}{T_Л} - \frac{l}{T_р}$ *км* больше, чем ракета. Чтобы пройти отделяющую их половину орбиты и нагнать ракету, Луне потребуется время

$$\frac{1}{2}l \Bigg/ \left(\frac{l}{T_Л} - \frac{l}{T_р}\right) = \frac{T_Л}{2\left(1 - \frac{T_Л}{T_р}\right)} \approx \frac{M_З}{M_Л} T_Л \approx 81 T_Л.$$

Итак, примерно через 80 лунных месяцев, то есть через 6—6,5 лет, Луна догнала бы ракету (ракета упала бы на Луну). Притяжение Луны, которым мы пренебрегли, только ускорит этот процесс.

7. $T \approx 450$ *сут.*

8. $a \approx 134\cdot 10^6$ *км*, $r_\alpha = 2a - r_\pi \approx 148\cdot 10^6$ *км.*

9. $R_З = 6371$ *км*, $H_\pi = 213$ *км*, $H_\alpha = 1560$ *км*,

$$a = R_З + \frac{H_\pi + H_\alpha}{2} \approx 7260 \quad км,$$

$$T = 2\pi a \sqrt{a/K} \approx 102{,}6 \quad мин.$$

10. Орбита космолета — эллипс с большой полуосью

$$a = \frac{1}{2}(R_З + R_М) \approx 168\cdot 10^6 \quad км.$$

Пусть t — искомое время перелета. Тогда период обращения космолета вокруг Солнца равен $2t$. По третьему закону Кеплера $a^3/4t^2 = R_З^3/T_З^2$, причем период обращения Земли $T_З \approx 365$ дней. Поэтому

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R_З}\right)^{3/2} T_З \approx \frac{1}{2}\cdot 365 \cdot \left(\frac{168\cdot 10^6}{150\cdot 10^6}\right)^{3/2} \approx 260 \quad сут.$$

11. $t \approx 150$ *сут*, $v \approx 27$ *км/сек.*

§ 11

1. Пусть перелет совершается по дуге AB (рис. P.2): $r_0 = SA = 150\cdot 10^6$ *км*, $r_1 = SB = 228\cdot 10^6$ *км*, $v_0 = 29{,}8$ *км/сек*, $fM_С = 132{,}5\times 10^9$ *км³/сек²* (где $M_С$ — масса Солнца). Ясно, что $a = 189\cdot 10^6$ *км.*

По формуле (5) найдем, что $K = \frac{v_0^2}{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}} = 11\cdot 10^{10}$ *км³/сек²*. Но в силу (4)

$s = m\frac{fM_С - K}{ar_0^2} = 222\,000$ *м²*. Если парус имеет форму круга, то его радиус $R \approx 270$ *м*, $m_0 = \rho s \approx 450$ *кг.*

2. Остаются в силе интеграл энергии, интеграл площадей, интеграл Лапласа и их следствия. Орбита может быть только гиперболой (или прямой), ибо в каждый момент времени $h = v_0^2 - 2K/r_0 > 0$ и поэтому $\varepsilon > 1$.

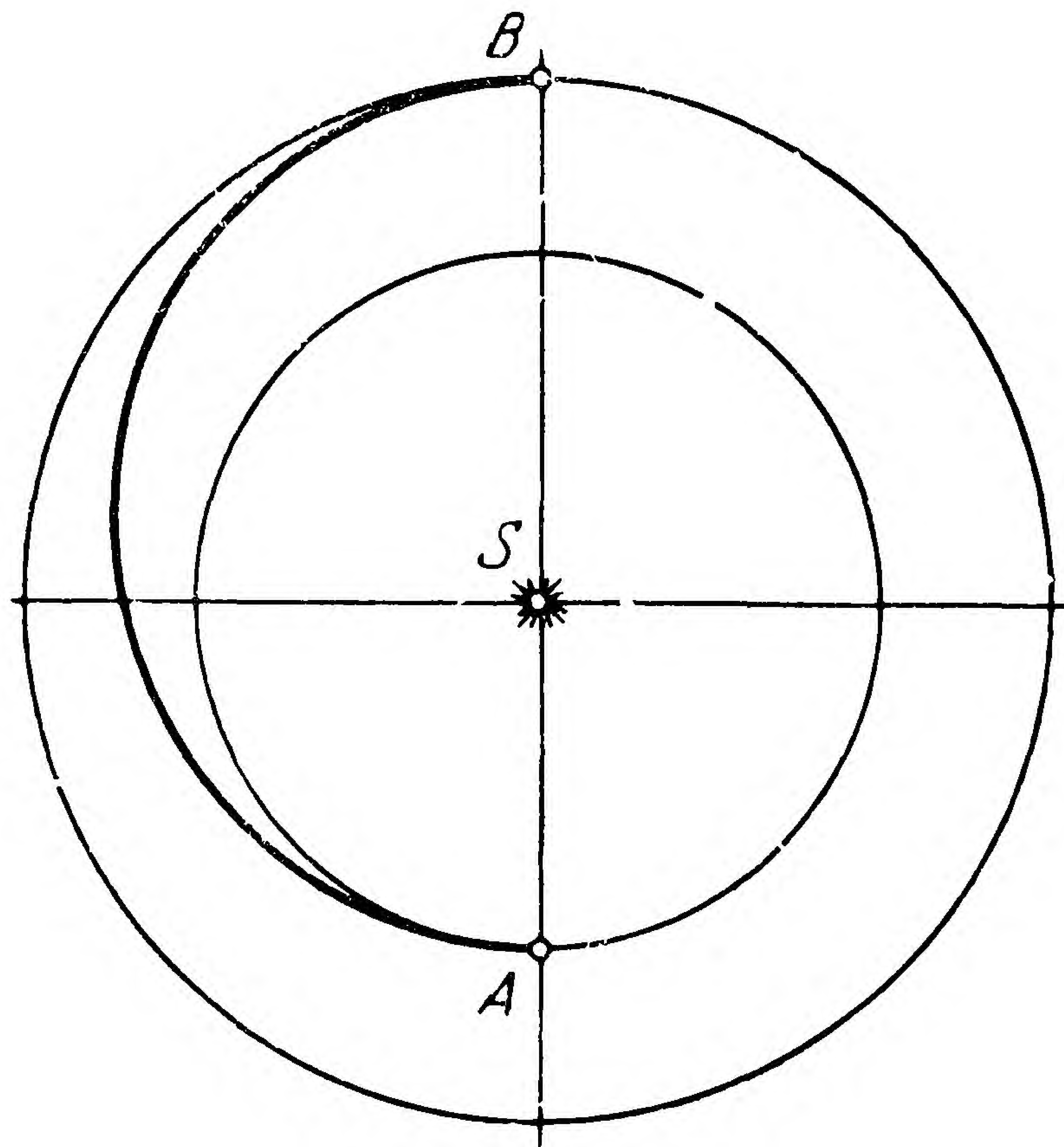


Рис. Р.2.

§ 12

1. Уравнение спирали в комплексной форме имеет вид

$$w = r_0 e^{c\theta} e^{i\theta} = r_0 e^{(c+i)\theta}, \quad |w| = r = r_0 e^{c\theta} \quad (c \neq 0). \tag{I}$$

Покажем, что можно так подобрать функцию $\theta = \theta(t)$ и константу c, чтобы функция (I) удовлетворяла уравнению (35). Число K можем представить в показательной форме: $K = |K| e^{i\beta}$. Уравнение (35) перепишем так:

$$\ddot{w} = -|K| e^{i(\theta+\beta)}/r^2. \tag{II}$$

Из (I) следует, что

$$\dot{w} = r_0 (c+i) e^{(c+i)\theta} \dot{\theta}, \tag{III}$$

$$\ddot{w} = r_0 (c+i) [\ddot{\theta} + (c+i)\dot{\theta}^2] e^{(c+i)\theta}. \tag{IIIa}$$

Из (IIIa) и (II) найдем, что

$$r_0^3 e^{3c\theta} [(c+i)^2 \dot{\theta}^2 + (c+i)\ddot{\theta}] = -|K| e^{i\beta}. \tag{IV}$$

Приравнивая соответственно вещественные и мнимые части обеих частей последнего равенства, получим

$$r_0^3 e^{3c\theta} [(c^2-1)\dot{\theta}^2 + c\ddot{\theta}] = -|K| \cos\beta, \tag{V}$$

$$r_0^3 e^{3c\theta} [2c\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}] = -|K| \sin\beta. \tag{VI}$$

Искомая функция $\theta(t)$ должна удовлетворять обоим уравнениям (V) и (VI). Умножая (VI) на c и вычитая затем из него (V), получим уравнение

$$r_0^3 e^{3c\theta}\dot{\theta}^2(c^2+1) = |K|(\cos\beta - c\sin\beta), \qquad \text{(VII)}$$

откуда

$$e^{3c\theta}\dot{\theta}^2 = D,$$

где

$$D = |K|(\cos\beta - c\sin\beta)/[r_0^3(c^2+1)]. \qquad \text{(VIII)}$$

Ясно, что уравнение (VII) имеет решение лишь в том случае, когда

$$\cos\beta - c\sin\beta \geqslant 0. \qquad \text{(IX)}$$

При таком дополнительном ограничении из (VII) следует

$$e^{\frac{3c\theta}{2}}\dot{\theta} = \delta, \qquad \text{(X)}$$

где

$$\delta = +\sqrt{D} \text{ или } \delta = -\sqrt{D};$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3/2c\theta}) = \frac{3}{2}c\delta. \qquad \text{(XI)}$$

Пусть $\theta = 0$ при $t = t_0$. В таком случае

$$e^{3/2c\theta} - 1 = \frac{3}{2}c\delta(t-t_0), \qquad \text{(XII)}$$

$$\theta = \frac{2}{3c}\ln\left[1 + \frac{3}{2}c\delta(t-t_0)\right]. \qquad \text{(XIII)}$$

Умножая обе части равенства (XII) на $r_0^{3/2}$, найдем:

$$r^{3/2} - r_0^{3/2} = \frac{3}{2}cr_0^{3/2}\delta(t-t_0). \qquad \text{(XIV)}$$

Функция (XIII) является решением уравнения (X), вытекающего из уравнений (V) и (VI). Но она не всегда будет удовлетворять самим уравнениям (V) и (VI).

Выясним, при какой же зависимости между параметрами функция (XIII) будет удовлетворять также обоим уравнениям (V) и (VI).

Из (X) видно, что $\dot{\theta} = \delta e^{-\frac{3}{2}c\theta}$. Поэтому

$$\ddot{\theta} = \delta e^{-\frac{3}{2}c\theta}\left(-\frac{3}{2}c\right)\dot{\theta} = -\frac{3}{2}cDe^{-3c\theta}. \qquad \text{(XV)}$$

Подставляя эти значения для $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ в (VI), получим:

$$c(\cos\beta - c\sin\beta) = -2(c^2+1)\sin\beta, \qquad \text{(XVI)}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{c}{c^2+2}. \qquad \text{(XVIa)}$$

Таким образом, функция (XIII) удовлетворяет уравнению (VI) в том и только том случае, когда β и c связаны зависимостью (XVIa). Легко проверить, что при выполнении равенства (XVI) функция (XIII) удовлетворяет также уравнению (V), а значит, и уравнению (IV).

Из равенства (34) видно, что вещественная и мнимая части числа K равны соответственно

$$K_1 = fM - \frac{\alpha r_0^2}{m} s \cos^3\varphi \quad \text{и} \quad K_2 = -\frac{\alpha r_0^2}{m} s \cos^2\varphi \sin\varphi. \qquad \text{(XVII)}$$

Ясно, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{K_2}{K_1}.$$

Таким образом, спираль $r = r_0 e^{c\theta}$ может оказаться орбитой корабля с солнечным парусом лишь в том случае, когда константа c и угол ориентации паруса φ связаны зависимостью

$$\alpha r_0^2 s \cos^2\varphi \sin\varphi / (-\alpha r_0^2 s \cos^3\varphi + fMm) = c / (c^2 + 2). \qquad \text{(XVIII)}$$

2. Указание. Находим последовательно c, β, D, $\dot\theta_0$, $\dot\omega_0$ и время перелета $t - t_0$ из формул (XVIII), (XVIa), (VIII),(X), (IIIa), (XIV) решения задачи 1 (при этом $\theta_0 = 0$).

3. Как видно из формулы (XIV) решения задачи 1, угол φ следует выбрать так, чтобы величина c^2D имела максимальное значение. Из (VIII) следует, что $c^2D = \lambda\ (cK_2)$, где λ — некоторая константа, не зависящая от φ. Поэтому

$$\frac{d\,(cK_2)}{d\varphi} \equiv c\frac{dK_2}{d\varphi} + K_2\frac{dc}{d\varphi} = 0. \qquad \text{(XIX)}$$

Производные $dc/d\varphi$ и $dK_2/d\varphi$ находим из (XVII) и (XVIII). Из системы двух уравнений (XVIII) и (XIX) можно теперь найти искомый угол φ. Эту систему удобно решить графически.

ГЛАВА III

§ 1

1. Используя формулу (6), найдем $\tau \approx 51$ *час*.

2. Полагая в формуле (6) $p = 2r_\pi = 2$ а. е., $r = 30{,}1$ а. е. $K\hat{c} = k^2$ (а.е.)^3/*сут*^{2}, $k = 0{,}01720$, получим $\tau \approx 13$ лет.

3. $\theta = {}^3/_2\pi$, $\sin\theta = -1$, $a = 6630$ *км*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $\dfrac{T}{2\pi} = a\sqrt{\dfrac{a}{K}} = 855{,}3$, $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a) = 0{,}025$. По формуле (8) $\tau = 855{,}3\cdot({}^3/_2\,\pi + 2\cdot 0{,}025)$ *сек* ≈ 68 *мин*, $t_1 = t_0 + \tau \approx 10$ *час* 8 *мин*.

§ 2

1. Пусть E — эксцентрическая аномалия точки P встречи космолета с орбитой Луны, $r = AP = 384\,400$ *км*. Время перелета τ можно найти из уравнения Кеплера

$$\tau = \frac{1}{n}\,(E - \varepsilon \sin E),$$

причем $r = a(1 - \varepsilon \cos E)$. Найдем последовательно a, ε, n, $\cos E$, E, $\sin E$. По условию $v_\pi = 10{,}95$ *км/сек*, $r_\pi = 6600$ *км*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $r = 384\,400$ *км*. Но $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - v_\pi^2 r_\pi} = 449 \cdot 10^3$ *км*, $n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{K}{a}} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$; $r_\pi = a(1 - \varepsilon)$, откуда $\varepsilon = 1 - \frac{r_\pi}{a} = 0{,}9853$, $\cos E = \frac{a - r}{a\varepsilon} = 0{,}1460$. По таблицам найдем $E = 1{,}425$, $\sin E = 0{,}9894$. Поэтому

$$\tau = \frac{1}{n}(E - \varepsilon \sin E) \approx 60 \text{ час.}$$

2. $r_\pi = 6600$ *км*, $v_\pi = 12{,}0$ *км/сек*, $K = 398\,600$ *км*^{3}/*сек*^{2}, $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - r_\pi \cdot v_\pi^2} = -17\,170$ *км*. Орбита — гипербола (ибо $a < 0$). Произведя расчет в том же порядке, что и в предыдущей задаче, получим $\tau \approx 20$ *час*.

3. $\tau = \frac{1}{n}(E - \varepsilon \sin E)$. В силу (14)

$$\cos E = \frac{a - r}{a\varepsilon}.$$

Так как по условию $0 < E < \pi$, то

$$\sin E = +\sqrt{1 - \cos^2 E}, \quad E = \arccos\left[\frac{a - r}{a\varepsilon}\right], \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}.$$

Поэтому

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}}\left[\arccos\frac{a - r}{a\varepsilon} - \varepsilon\sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{a\varepsilon}\right)^2}\right].$$

4. Из (2.9.5) и (4) найдем:

$$v^2 = \frac{K}{a}\,\frac{1 + \varepsilon \cos Z}{1 - \varepsilon \cos Z},$$

$$v_n = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sqrt{Kp}}{r} = \sqrt{\frac{K(1 - \varepsilon^2)}{a}}\,\frac{1}{1 - \varepsilon \cos Z} = \frac{nb}{1 - \varepsilon \cos Z},$$

$$v_r^2 = \frac{K}{p}\varepsilon^2 \sin^2\theta = \frac{K}{p}(\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cos^2\theta) =$$

$$= \frac{K}{a(1 - \varepsilon^2)}\left[\varepsilon^2 - \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos Z} - 1\right)^2\right] - \frac{K}{a}\,\frac{\varepsilon^2 \sin^2 Z}{(1 - \varepsilon \cos Z)^2},$$

откуда

$$v_r = \frac{na\varepsilon \sin Z}{1 - \varepsilon \cos Z}.$$

При $0 < \varepsilon < 1$ следует в этих формулах положить $Z = E$, а при $\varepsilon > 1$ — заменить Z, $\sin Z$, $\cos Z$, n, a, b соответственно на iH, $i\,\operatorname{sh} H$, $\operatorname{ch} H$, $-i\,|n|$, $-|a|$, $-i\,|b|$.

5. $$\tau = \frac{1}{n}\left[2\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right],$$

где

$$n = \sqrt{a^3/K}.$$

В случае гиперболической орбиты ($\varepsilon > 1$) можно избежать возникающих в этой формуле мнимых величин, если воспользоваться тождествами $n = -i\,|n|$, $\sqrt{1-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon - 1}$, $\operatorname{arctg}(i\lambda) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ (чтобы убедиться в справедливости последнего равенства, достаточно обе его части разложить в ряд по степеням λ). Получим

$$\tau = \frac{1}{|n|}\left[\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}\right)\right].$$

§ 3

1. а) $\tau = 50$ *мин* $= 3000$ *сек*, $n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{K}{a}} = 1{,}997\cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, $M = n\tau = 0{,}060$. Положим $E_0 = M$. По формуле (11) найдем последовательно

$$E_1 = M_0 + \varepsilon\sin E_0 = 0{,}090,\quad E_2 = 0{,}105,\quad E_3 = 0{,}112,$$
$$E_4 = 0{,}116,\quad E_5 = 0{,}118,\quad E_6 = 0{,}119,\quad E_7 = 0{,}119.$$

Можно принять $E = 0{,}119$ (*рад*). Согласно (3.2.21)

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \approx 0{,}1031,\quad \theta = 11°48',$$
$$r = a(1-\varepsilon\cos E) \approx 50\,300\ \textit{км}.$$

2. $\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{2}{35}$, $a = \frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi) = 7000$ *км*, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1{,}078\cdot 10^{-3}$, $\tau = 1$ *час* 20 *мин* $= 4800$ *сек*; $M = n\tau = 5{,}174$. Уравнение Кеплера $E - \varepsilon\sin E = M$ решим способом итераций. Положим $E_0 = M = 5{,}174$. По формуле (11) найдем

$$E_1 = M + \varepsilon\sin E_0 = 5{,}125,\quad E_2 = 5{,}122,\quad E_3 = 5{,}122.$$

Итак, $E = 5{,}122$ *рад*, то есть $E \approx 293{,}5°$,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} = -0{,}6947,\ \text{откуда}\ \theta = 5{,}07\ \textit{рад},$$

то есть $\theta \approx 290°30'$. $H = a(1-\varepsilon\cos E) - 6370 = 6840 - 6370$, то есть $H = 470$ *км*.

3. $r = a(1 - \varepsilon \cos E)$, $a = \frac{1}{2}(70 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4) = 395 \cdot 10^3$ *км*, $\varepsilon = \frac{61}{79} \approx 0{,}772$, $\tau = 48$ *час* $= 172\,800$ *сек*, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 25{,}4 \cdot 10^{-7}$ *сек*$^{-1}$, $M = n\tau = 0{,}439$. Вычисляя E способом неподвижной точки, найдем $E = 1{,}140$. Тогда $\cos E = 0{,}4176$, $r = a(1 - \varepsilon \cos E) = 268 \cdot 10^3$ *км*.

4. $r_\pi = 630 + 6370 = 7000$ *км*, $v_\pi = 14{,}0$ *км/сек*, $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $a = \frac{Kr_\pi}{2K - v_\pi^2 r_\pi} = -4900$ *км*. Таким образом, орбита—гипербола.

Так как $r_\pi = |a|(\varepsilon - 1)$, то $\varepsilon = 1 + \frac{r_\pi}{|a|} = 2{,}44$,

$$|n| = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}} = 0{,}0019, \quad M = |n|\tau = 68{,}4.$$

Способом итераций находим $H \approx 4{,}08$, а затем $r \approx 347 \cdot 10^3$ *км*.

§ 4

1. $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi)$, $c = a\varepsilon = \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)$. По формуле (7) при малом ε имеем

$$H \approx r - R \approx a - a\varepsilon \cos M - R,$$

то есть

$$H \approx \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) - \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)\cos M. \qquad \text{(I)}$$

2. По формуле (I) (см. решение предыдущей задачи) можно найти M. Так как $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, то затем легко вычислить t_0.

3. $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, $R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) = a$, причем a можно найти из зависимости $T^2 = \frac{4\pi^2}{K}a^3$. Пользуясь формулой (I) из решения задачи 1, можно вычислить $H_\alpha - H_\pi$, а затем и ε по формуле $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a)$.

4. $\tau = 1$ *час* 15 *мин* $= 4500$ *сек*; $a = R + \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) = 6625$ *км*, $\varepsilon = (H_\alpha - H_\pi)/(2a) = 0{,}0110$, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1{,}143 \cdot 10^{-3}$, $M = n\tau = 5{,}144$. По таблицам находим $\sin M = -0{,}9083$, $\cos M = 0{,}4183$,

$\theta = M + 2\varepsilon \cdot \sin M = 5{,}124$ *рад*, то есть $\theta \approx 293°35'$.

$$H \approx \frac{1}{2}(H_\alpha + H_\pi) - \frac{1}{2}(H_\alpha - H_\pi)\cos M \approx 224\text{ км}.$$

§ 5

1. По формулам, связывающим элементы эллиптической орбиты, находим

$$a = \frac{r_\pi + r_\alpha}{2} = 180 \cdot 10^6\text{ км},$$

$$\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{1}{3},\quad p = a(1-\varepsilon^2) = 160 \cdot 10^6\text{ см}.$$

Положим $r_1 = SC$, $r_2 = SD$, $\beta = \angle CSD$. Тогда

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\beta}.$$

Найдем β: $\beta = \theta_D - \theta_C$, где θ_C и θ_D — истинные аномалии точек C и D.

$$r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta_C},$$

откуда

$$\cos\theta_C = \frac{p - r_1}{r_1 \varepsilon},$$

$$\cos\theta_C = \frac{160 \cdot 10^6 - 150 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}2,\quad \theta_C = 1{,}369\ \text{рад}.$$

Аналогично

$$\cos\theta_D = \frac{p - r_2}{r_2 \varepsilon} = -0{,}8947,\quad \theta_D = 2{,}679\ \text{рад},\quad \beta = \theta_D - \theta_C = 1{,}310,$$

$$s = 10^6 \cdot \sqrt{150^2 + 228^2 - 2 \cdot 150 \cdot 228 \cdot 0{,}2578} = 238 \cdot 10^6\ \text{км},$$

$$\cos\lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a} = -0{,}2941,\quad \lambda_1 = 1{,}869,\quad \sin\lambda_1 = 0{,}9558,$$

$$\cos\lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a} = 0{,}7059,\quad \lambda_2 = 0{,}787,\quad \sin\lambda_2 = 0{,}7082,$$

$$\frac{1}{n} = a\sqrt{\frac{a}{K_C}} = 6637 \cdot 10^3,$$

$$\tau = \frac{1}{n}\left[(\lambda_1 - \lambda_2) - (\sin\lambda_1 - \sin\lambda_2)\right] = 5{,}54 \cdot 10^6\ \text{сек} \approx 64\ \text{сут}.$$

2. Пусть $r_1 = SC = 150 \cdot 10^6$ *км*, $r_2 = SD = 800 \cdot 10^6$ *км*, $v_1 = 50{,}0$ *км/сек*, $K_C = 132{,}5 \cdot 10^9$ *км*^{3}*/сек*. Из формулы $v_1^2 = K_C\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)$

найдем, что $a = -180{,}7\cdot 10^6$ *км* < 0. Поэтому орбита — гипербола, и следует применить формулу Ламберта в ее гиперболическом варианте (20):

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 814\cdot 10^6 \text{ км}, \quad \frac{1}{|n|} = |a|\sqrt{\frac{|a|}{K_C}} = 6673\cdot 10^3,$$

$\operatorname{ch}\lambda_1' = 1 + \dfrac{r_1 + r_2 + s}{2|a|} = 5{,}881$. По таблицам гиперболических функций найдем $\lambda_1' = 2{,}458$, $\operatorname{sh}\lambda_1' = 5{,}798$.

Аналогично $\operatorname{ch}\lambda_2' = 1 + \dfrac{r_1 + r_2 - s}{2|a|} = 1{,}376$, $\lambda_2' = 0{,}843$,

$$\operatorname{sh}\lambda_2' = 0{,}946, \quad \tau = \frac{1}{|n|}\left[(\operatorname{sh}\lambda_1' - \lambda_1') - (\operatorname{sh}\lambda_2' - \lambda_2')\right] =$$
$$= 230\cdot 10^5 \text{ сек} = 265 \text{ сут.}$$

3. Скорость космолета близка к параболической, так что для подсчета времени перелета допустимо воспользоваться формулой Ньютона — Эйлера (24). $s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 60^\circ} = 195\cdot 10^6$ *км*, $K = 132{,}5\cdot 10^9$ *км³/сек²*. По формуле (24) найдем: $\tau \approx 5{,}15\cdot 10^5$ *сек* ≈ 60 *сут*.

ГЛАВА IV

§ 2

1. Учтем, что гринвичское время («среднее мировое время») отличается от московского на 3 *час* и что Земля совершает полный оборот вокруг оси за 86 164 *сек*. Поэтому

$$S = S_0 + \frac{360^\circ}{86\,164}\cdot 3600\,(t - 3) + \lambda \text{ (градусов).}$$

2. $$S = 217{,}94^\circ + \frac{360^\circ}{86\,164}(86\,400 - 86\,164)\cdot 6 +$$
$$+ \frac{360^\circ}{86\,164}(20 - 3)\cdot 3600 + 32^\circ \approx 151{,}6^\circ.$$

3. Зная дату и момент наблюдения, можно для этого момента вычислить звездное время S в точке B. Пусть $Ax_э y_э z_э$ — геоцентрическая экваториальная система координат (ось $Ax_э$ направлена в точку весеннего равноденствия); $Bx_г y_г z_г$ — топоцентрическая горизонтальная система. Рассмотрим еще вспомогательную систему отсчета $Bxyz$ с началом в точке B и с осями, соответственно параллельными и одинаково направленными с осями $Ax_э$, $Ay_э$, $Az_э$ (рис. Р.3). Ясно, что $x_э\boldsymbol{i} + y_э\boldsymbol{j} + z_э\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \overrightarrow{AB}$, причем вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет такие координаты:

$$x_0 = R\cos\varphi\cos(S - 180^\circ), \quad y_0 = R\cos\varphi\sin(S - 180^\circ),$$
$$x = x_э - x_0, \quad y = y_э - y_0, \quad z_0 = R\sin\varphi, \quad z = z_э - {}_0z.$$

От системы $Bxyz$ можно перейти к системе $Bx_\text{г}y_\text{г}z_\text{г}$ с помощью двух поворотов (рис. Р.4): после первого поворота вокруг оси Bz на угол $S - 180°$ получим новую систему $Bx_1y_1z_1$, причем ось Bz_1 совпадает с

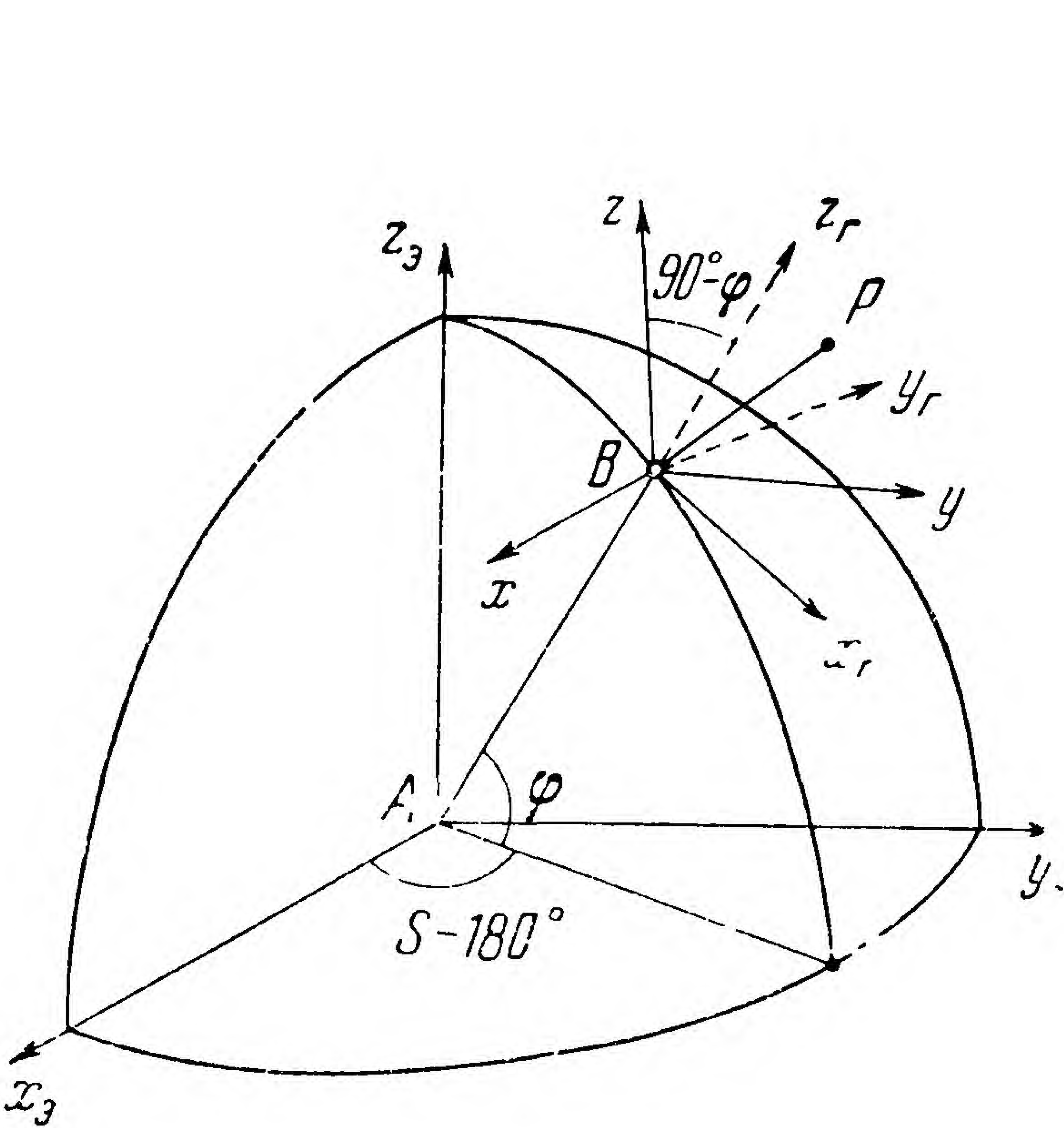


Рис. Р.3.

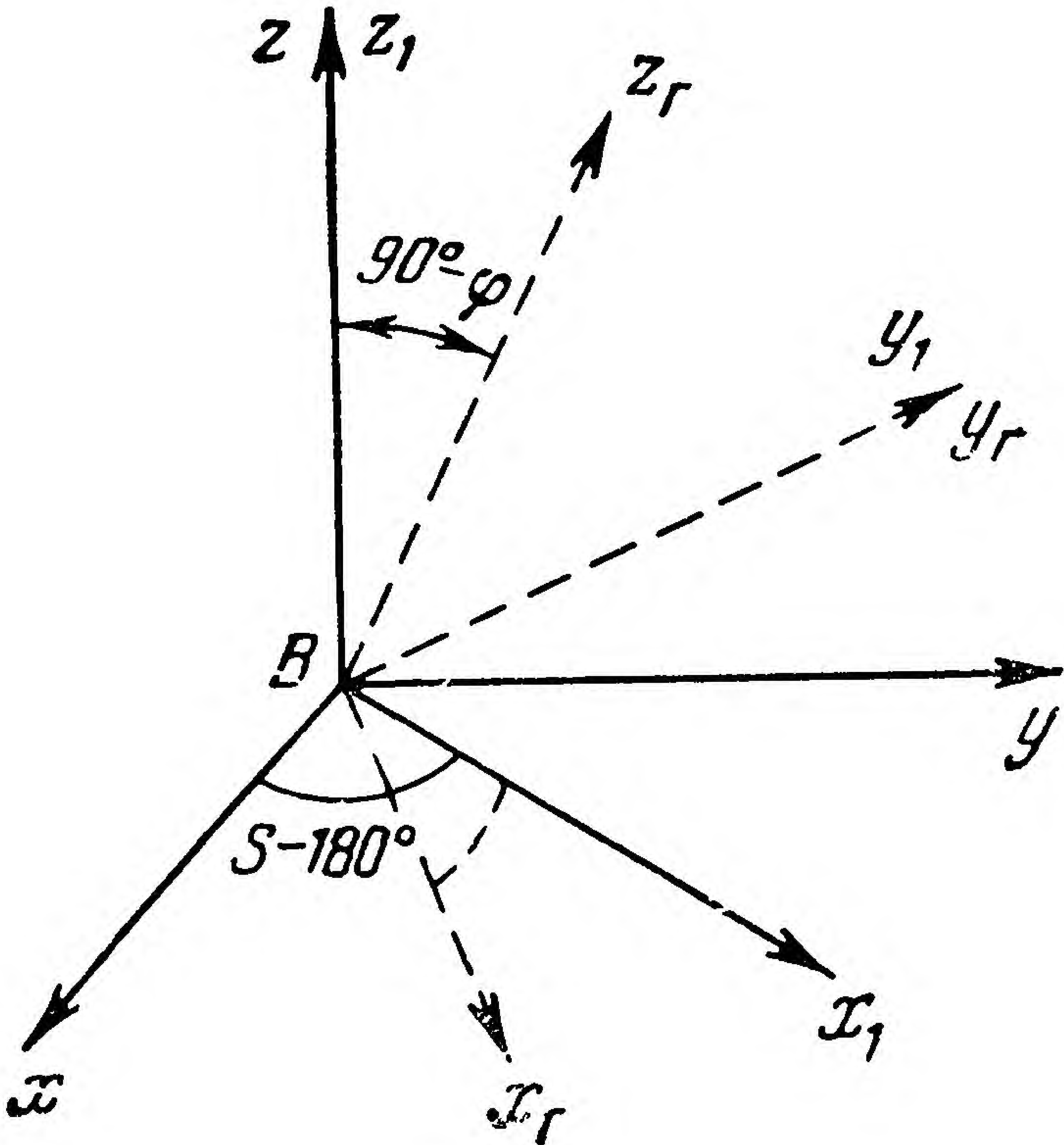


Рис. Р.4.

осью Bz; после второго поворота вокруг оси By_1 на угол $90° - \varphi$ получим систему $Bx_\text{г}y_\text{г}z_\text{г}$, причем ось By_1 совпадает с осью $By_\text{г}$.

Составим таблицу углов между осями и матрицу первого поворота

	Bx	By	Bz
Bx_1	$S - 180°$	$270° - S$	$90°$
By_1	$S - 90°$	$S - 180°$	$90°$
Bz_1	$90°$	$90°$	$0°$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & -\cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично для второго поворота:

	Bx_1	By_1	Bz_1
$Bx_\text{г}$	$90° - \varphi$	$90°$	$180° - \varphi$
$By_\text{г}$	$90°$	0	$90°$
$Bz_\text{г}$	φ	$90°$	$90° - \varphi$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Отсюда:

$$\begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix} = A_2A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_1^{-1}A_2^{-1} \begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_э \\ y_э \\ z_э \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + A_1^{-1}A_2^{-1} \begin{bmatrix} x_г \\ y_г \\ z_г \end{bmatrix}, \tag{I}$$

где

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & -\cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Зная $x_г$, $y_г$, $z_г$, S и φ, легко найти из (I) $x_э$, $y_э$, $z_э$.

4. Зная ρ, h, A, легко вычислить декартовы горизонтальные координаты ($x_г$, $y_г$, $z_г$):

$$x_г = \rho\cos h\cos A, \quad y_г = \rho\cos h\sin A, \quad z_г = \rho\sin h,$$

а затем декартовы экваториальные $x_э$, $y_э$, $z_э$ (см. предыдущую задачу). После этого можно найти r, δ, α из формул

$$x_э = r\cos\delta\cos\alpha, \quad y_э = r\cos\delta\sin\alpha, \quad z_э = r\sin\delta.$$

Отсюда следует, что

$$r_э^2 = x_э^2 + y_э^2 + z_э^2, \quad \sin\delta = \frac{z_э}{r}.$$

Последним соотношением угол δ определяется однозначно, так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$. Затем уже нетрудно найти $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и угол α.

5. Вычисляем сначала $x_э$, $y_э$, $z_э$, затем (см. задачу 3) $x_г$, $y_г$, $z_г$ и определяем, наконец, ρ, h и A из системы уравнений:

$$x_г = \rho\cos h\cos A,$$
$$y_г = \rho\cos h\sin A, \quad z_г = \rho\sin h.$$

6. Пусть (x, y, z) — искомые декартовы координаты перигея орбиты спутника, (ξ, η, ζ) — орбитальные координаты. Тогда

$$\xi = a(1-\varepsilon), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Из (21) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a(1-\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos\gamma \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos\gamma \\ \sin\omega\sin\gamma \end{bmatrix} a(1-\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \cdot 560$$

то есть $x \approx -1980$ *км*, $y \approx 3960$ *км*, $z \approx 3430$ *км*.

Далее: $r = a(1-\varepsilon) = 5600$ *км*, $\sin\delta = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}6125$,

$$\delta \approx 37^\circ 46', \quad \cos\delta = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{(r\cos\delta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}447, \quad \alpha \approx 15^\circ 26'.$$

7.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x Q_x R_x \\ P_y Q_y R_y \\ P_z Q_z R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\Omega\sin\gamma \\ -\cos\Omega\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

§ 3

1. Пусть ракета оказалась над точкой P_1 в момент t_1. Рассмотрим невращающуюся систему координат $Axyz$ с началом в центре Земли, осью Az, перпендикулярной к плоскости экватора, и осью Ax, проходящей через точку встречи гринвичского меридиана с экватором в момент t_1. Так как Земля за 6 *час* повернулась на $360°\cdot 6\cdot 3600/86164 = 90{,}25°$, то точка P_2 будет иметь относительно системы отсчета $Axyz$ долготу $\lambda_2' = 90{,}25° + \lambda_2 = 270{,}25°$. Обозначим через ϱ_1 и ϱ_2 орты векторов $\overrightarrow{AP_1}$ и $\overrightarrow{AP_2}$.

$$\varrho_1 = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 \boldsymbol{i} - \cos\varphi_1\sin\lambda_1 \boldsymbol{j} + \sin\varphi_1 \boldsymbol{k},$$

$$\varrho_2 = \cos\varphi_2\cos\lambda_2' \boldsymbol{i} + \cos\varphi_2\sin\lambda_2' \boldsymbol{j} + \sin\varphi_2 \boldsymbol{k}.$$

Нормаль к плоскости орбиты совпадает по направлению с вектором $\varrho_3 = \varrho_1 \times \varrho_2$. Угол γ между вектором ϱ_3 и ортом $\boldsymbol{k}$ оси Az можно найти из зависимости $\boldsymbol{k}\cdot\varrho_3 = |\varrho_3|\cos\gamma$. Итак, $\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{k}\cdot(\varrho_1\times\varrho_2)}{|\varrho_1\times\varrho_2|}$, причем

$$\boldsymbol{k}\cdot(\varrho_1\times\varrho_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi_1\cos\lambda_1 & \cos\varphi_1\sin\lambda_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2\cos\lambda_2' & \cos\varphi_2\sin\lambda_2' & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}$$

и

$$\varrho_1 \times \varrho_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi_1 \cos\lambda_1' & \cos\varphi_1 \sin\lambda_1' & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 \cos\lambda_2' & \cos\varphi_2 \sin\lambda_2' & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}.$$

После выкладок найдем, что $\cos\gamma = 0{,}006$, $\gamma \approx 89°$.

2. Пусть $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ — орты координатных осей Ax, Ay, Az; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты осей орбитальной системы координат $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AP_1} \equiv \boldsymbol{r}_1 = d\,(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}), \quad \overrightarrow{AP_2} \equiv \boldsymbol{r}_2 = d\,(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}), \\ \overrightarrow{AP_3} \equiv \boldsymbol{r}_3 = d\,(-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}). \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}, \quad \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K} \\ 2d & d & 0 \\ d & d & d \end{vmatrix} = d^2(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}),$$

$$|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = d^2\sqrt{6},$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}) \approx 0{,}408 \cdot \boldsymbol{I} - 0{,}816\boldsymbol{J} + 0{,}408 \cdot \boldsymbol{K}.$$

В силу формул (1) и (2)

$$\sin\Omega \cdot \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -\cos\Omega \cdot \sin\gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Так как

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 180°,$$

то

$$\sin\gamma > 0, \ \sin\gamma = +\sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{\frac{5}{6}},$$

$$\sin\Omega = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\Omega = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда

$$\gamma \approx 65°54', \qquad \Omega \approx 26°33'.$$

По формулам (4) найдем c_1 и c_3:

$$c_1(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3,$$

то есть

$$c_1 d^2(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}) = d^2(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}),$$

откуда $c_1 = 1$. Аналогично найдем, что $c_2 = 1$. Из (5а) получим

$$p - r_2 = (p - r_1) + (p - r_3),$$

откуда

$$p = r_1 - r_2 + r_3.$$

Из (I) видно, что

$$r_1 = d\sqrt{5}, \quad r_2 = d\sqrt{3}, \quad r_3 = d\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$p = d(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 1{,}908d \approx 1{,}91d.$$

Согласно (8)

$$\varepsilon\,|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3| = |(p - r_1)\boldsymbol{r}_3 - (p - r_3)\,\boldsymbol{r}_1|,$$

$$\varepsilon d^2 \sqrt{6} = |-0{,}328d^2(-\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}) - 0{,}494d^2(2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})| \approx d^2\cdot 0{,}887.$$

Отсюда $\varepsilon \approx 0{,}362$. Движение — эллиптическое. Вычислим ω. Сначала найдем векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}$. По формуле (6)

$$0{,}887d^2\boldsymbol{j} = d^2(-0{,}660\boldsymbol{I} - 0{,}494\boldsymbol{J} - 0{,}328\boldsymbol{K}).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{j} = -0{,}744\boldsymbol{I} - 0{,}557\boldsymbol{J} - 0{,}370\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -0{,}529\boldsymbol{I} + 0{,}153\boldsymbol{J} + 0{,}834\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \cos\Omega\,\boldsymbol{I} + \sin\Omega\,\boldsymbol{J} = \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{I} + \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{J}.$$

Угол ω найдем из зависимостей

$$\boldsymbol{\beta i} = \cos\omega,\quad \boldsymbol{\beta j} = \cos(\omega + 90^\circ) = -\sin\omega,$$

$$\cos\omega = \boldsymbol{\beta i} = -0{,}4047,\quad \sin\omega = -\boldsymbol{\beta j} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\cdot 0{,}744 + 0{,}557) > 0.$$

По таблицам находим $\omega \approx 113^\circ 50'$. Из формул (12), (13) можно найти момент t_0 прохождения спутника через перигей.

$$a = p(1 - \varepsilon^2) \approx 44\,200 \text{ км},$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 41\,700 \text{ км};\quad \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{i} = 9160,\quad \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{j} = -33\,420.$$

Поэтому [см. (12)]

$$\cos E_2 > 0,\quad \sin E_2 = -0{,}8014,\quad E_2 = 4{,}071,$$

$$\frac{1}{n} = a\sqrt{\frac{a}{K}} = 954{,}5,\quad t_2 - t_0 = \frac{1}{n}(E_2 - \varepsilon\cdot\sin E_2) = 3680 \text{ сек};$$

отсюда $t_0 \approx 11$ *час.*

§ 4

1. $$\varepsilon = \frac{\lambda}{K}\ (\text{где } \lambda = |\boldsymbol{\lambda}|),\quad p = \frac{\sigma^2}{K}\ (\text{здесь } \sigma = |\boldsymbol{\sigma}|),$$

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \sigma^2\frac{K}{K^2 - \lambda^2},\quad \cos\gamma = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\sigma},\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,$$

где $\boldsymbol{k}$ — орт оси Az. Отсюда находим γ. Пусть $\gamma \neq 0$; $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\sigma}/(\sigma\sin\gamma)$. Тогда проекции вектора $\boldsymbol{\beta}$ на оси Ax и Ay равны соответственно $\cos\Omega$ и $\sin\Omega$: $\cos\Omega = \boldsymbol{\beta i}$, $\sin\Omega = \boldsymbol{\beta j}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ — орты осей Ax, Ay). Отсюда можно вычислить Ω. Имеем

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \lambda\cos\omega,\quad \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\lambda} = \sin\omega\,\boldsymbol{\sigma}/\sigma.$$

Отсюда находим ω.

2. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{v}_1 + K\boldsymbol{r}_1/r_1)$. По формулам предыдущей задачи находим ε, p, Ω, γ, ω. Из формулы $r_1 = a(1 - \varepsilon\cdot\cos Z_1)$ найдем $\cos Z_1$, а затем $\sin Z_1$ и Z_1; t_0 можно найти из уравнений Кеплера

$$Z_1 - \varepsilon\cdot\sin Z_1 = n(t_1 - t_0).$$

§ 6

1. Спутник движется по окружности с угловой скоростью $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}$. Такую же угловую скорость относительно невращающейся Земли имеет и подспутниковая точка, так что ее линейная скорость v равна Rn (R — средний радиус Земли). В момент t_0 прохождения спутника над экватором (с южного полушария на северное) можно скорость подспутниковой точки разложить на две компоненты $v_м$ и $v_э$, из которых первая направлена по меридиану, а вторая — по экватору:

$$v_м = v \sin\gamma, \qquad v_э = v\cos\gamma.$$

Рассмотрим теперь движение подспутниковой точки на *вращающейся* Земле. Учтем, что каждая точка экватора вращается со скоростью $v_0 = \frac{2\pi R}{86164}$ *км/сек*. Поэтому скорость спутника относительно вращающейся Земли имеет такие компоненты (в момент t_0):

$$v'_э = v_э - v_0, \quad v'_м = v_м.$$

Поэтому угол γ' между трассой и экватором в момент t_0 удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\gamma' = \frac{v'_м}{v'_э} = \frac{v_м}{v_э - v_0}$. В нашем случае

$a = 6685$ *км*, $v = 6371\sqrt{398\,600/6685^3} \approx 7{,}36$ *км/сек*,
$v_э = v\cos\gamma = 7{,}36\cos 65° = 3{,}10$ *км/сек*, $v_м = v\sin\gamma \approx 6{,}67$ *км/сек*,
$v_0 = 0{,}464$ *км/сек*, $\operatorname{tg}\gamma' = 6{,}67/2{,}64 = 2{,}53$, $\gamma' = 68°25'$.

2. Можно воспользоваться формулами из решения предыдущей задачи. В данном случае

$$\gamma = 90°, \quad v = 6371\sqrt{\frac{398\,600}{6600^3}} \approx 7{,}50 \text{ км/сек},$$

$$v_э = 0, \quad v_м = 7{,}50 \text{ км/сек}, \quad \operatorname{tg}\gamma' = \frac{7{,}50}{(-0{,}47)} = -15{,}96, \quad \gamma' \approx 93°42'.$$

ГЛАВА VI

§ 1

1. $R_д = a\mu^{2/5} = 925\cdot 10^3$ *км*.

2. $a = 228\cdot 10^6$ *км*, $\mu = 1 : 3\,090\,000$, $R_п = a\sqrt{\mu} = 130\,000$ *км*, $R_д = a\mu^{2/5} = 580\,000$ *км*.

§ 3

1. $v = \sqrt{\frac{2K_З}{R_д}} = 0{,}92$ *км/сек*. Время перелета τ вычислим по

формуле (3.1.5):

$r_\pi = 6600$ *км*, $p = 2r_\pi = 13\,200$ *км*, $r = R_д = 930\,000$ *км*, $\tau = 188$ *час*.

2. $v_{III} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 v_{к.С}^2 + v_{п.п}^2}$, где $v_{к.С}$ — круговая скорость относительно Солнца вблизи планеты, $v_{п.п}$ — параболическая скорость относительно планеты у ее поверхности. В случае Марса

$$v_{к.С}^2 \approx 581, \quad v_{п.п}^2 = \frac{2K_п}{r_\pi} \approx 25{,}2,$$

$$v_{III} = \sqrt{105{,}7 + 25{,}2} \approx 11{,}5 \text{ км/сек}.$$

4. При выходе из сферы действия Земли ракета должна иметь нулевую скорость относительно Солнца и, следовательно, скорость $v_1 = 29{,}8$ *км/сек* относительно Земли.

Согласно интегралу энергии

$$v_0^2 - \frac{2K_З}{r_0} = v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д}.$$

Здесь

$$r_0 = 6600 \text{ км}, \ R_д = 925 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Поэтому $v_0 \approx 27{,}7$ *км*. Падение на Солнце можно рассматривать как полет по очень узкому эллипсу с большой осью $2a = 150 \cdot 10^6$ *км*. Время падения равно $\frac{1}{2}T = \pi a \sqrt{\frac{a}{K_С}} = 56{,}1 \cdot 10^5$ *сек* ≈ 65 суток.

5. $a = \frac{1}{2}(R_М + R_З) \approx 189 \cdot 10^6$ *км*. Скорость (v_2) ракеты относительно Солнца в момент выхода из сферы действия Земли определяется из зависимости $v_2^2 = K_С\left(\frac{2}{R_д} - \frac{1}{a}\right)$, откуда $v_2 = 32{,}4$ *км/сек*.

Если направление движения ракеты совпадает с направлением движения Земли вокруг Солнца, то скорость v_1 ракеты относительно Земли будет равна $v_2 - v_З$, где $v_З$ — круговая скорость движения Земли вокруг Солнца,

$$v_1 = 32{,}4 - 29{,}8 = 2{,}6 \text{ км/сек},$$

$$v_0^2 - \frac{2K_З}{r_0} = v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д} \quad (r_0 = 6800 \text{ км}, \ R_д \approx 925\,000 \text{ км}).$$

Отсюда $v_0 = 11{,}1$ *км/сек*.

6. Сохраняя обозначения задачи 5, имеем

$$v_2 \approx 42{,}1 \text{ км/сек}, \ v_1 = 42{,}1 - 29{,}8 \approx 12{,}3 \text{ км/сек},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2K_З}{r_0} + v_1^2 - \frac{2K_З}{R_д}} \approx 16{,}4 \text{ км/сек}.$$

ГЛАВА VIII

§ 2

2. $p \approx a \approx 6900$ *км*, $\frac{d\Omega}{dN} \approx -0{,}54^\circ \cos\gamma$, то есть

$$\dot{\Omega} = -0{,}38 \text{ град/об} \approx -6{,}1 \text{ град/сут},$$

$$\frac{d\omega}{dN} \approx 0{,}27^\circ (5\cos^2\gamma - 1), \text{ то есть } \dot{\omega} \approx 0{,}4 \text{ град/об} \approx 6{,}5 \text{ град/сут}.$$

3. $\dot{\Omega} = -4{,}27$ *град/сут*, $\dot{\omega} = 3{,}36$ *град/сут*.

4. $\dot{\Omega} = -2{,}7$ *град/сут*, $\dot{\omega} = -0{,}42$ *град/сут*.

§ 3

1. Из формулы $T^2 = \frac{4\pi^2}{K} a^3$ следует, что

$$2 \ln T = \ln\left(\frac{2\pi}{K}\right) + 3 \ln a, \quad 2\frac{dT}{T} = 3\frac{da}{a}.$$

Полагая $T = 96 \cdot 60$ *сек*, $dT = 3$ *сек*, $a \approx 7000$ *км*, получим $da \approx$ $\approx 2{,}1$ *км/сут*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

1 средние солнечные сутки = 86 400 *сек.*

1 звездные сутки, то есть продолжительность одного полного оборота Земли вокруг своей оси («относительно неподвижных звезд») = = 86 164 *сек* = 23 *час* 56 *мин* 4 *сек.*

Масса Солнца = $1{,}9866 \cdot 10^{30}$ *кг.*

Масса Земли = $5{,}975 \cdot 10^{24}$ *кг.*

Масса Луны = $7{,}343 \cdot 10^{22}$ *кг.*

Эксцентриситет орбиты Земли = 0,01678.

Среднее расстояние Земли от Солнца = 1 а. е. = (149 598 500 ± ± 500) *км.*

Средняя скорость движения Земли вокруг Солнца = 29,765 *км/сек.*

Эксцентриситет орбиты Луны = 0,05490.

Среднее расстояние Луны от Земли = (384 403 ± 1) *км.*

Расстояние Луны от Земли в перигее = 363 300 *км.*

Расстояние Луны от Земли в апогее = 405 500 *км.*

Некоторые сведения о телах солнечной системы

Название небесного тела	$\frac{M_С}{M_{пл}}$	Гравитационный параметр $K_{пл}$, *км³/сек²*	Экваториальный радиус $R_{экв}$, *км*	Полярный радиус $R_{пол}$, *км*	$\frac{R_{экв}}{R_{экв}-R_{пол}}$	Средний радиус $R_{ср}$, *км*	Ускорение силы тяжести на расстоянии $R_{ср}$ от центра планеты g, *м/сек²*	I космическая скорость v_I, *км/сек*	II космическая скорость v_{II}, *км/сек*	Радиус действия относительно Солнца $R_Д$, *км*
Солнце . . .	1	$132,51\cdot10^9$	696 500±±500			696 500±±500	273,2	436,2	616,9	
Меркурий	6 100 000±±50 000	$21,7\cdot10^3$	2330±10	2330±10	∞	2330±10	4,001	3,053	4,318	$111,8\cdot10^3$
Венера . . .	407 000±±1000	$32,6\cdot10^3$	6100±50	6100±50	∞	6100±50	8,750	7,306	10,332	$616,9\cdot10^3$
Земля	332 400±50	$398,60\cdot10^3$	6378,15±±0,05	6356,77±±0,05	298,3±±0,04	6371,02±±0,05	9,82020	7,9098	11,1861	$924,82\cdot10^3$
Луна	$M_З/M_Л$ = =81,35	$4,90\cdot10^3$	1738,57±±0,07	1737±0,07		1738,07±±0,07	1,6220	1,6790	2,3745	$66,28\cdot10^3$ (относит. Земли)
Марс	3 090 000±±10 000	$42,88\cdot10^3$	3415±5	3392±5	150±50	3407±5	3,694	3,548	5,017	$577\cdot10^3$
Юпитер . . .	1047,4±0,1	$126,51\cdot10^6$	71 375±50	66 679±50	15,2±0,1	69 774±±50	25,987	42,58	60,22	$48,14\cdot10^6$
Сатурн . . .	3500±3	$37,86\cdot10^6$	60 500±50	54 560±50	10,2±0,1	58 450±±50	11,082	25,45	35,99	$54,8\cdot10^6$
Уран	22 800±100	$5,81\cdot10^6$	24 850±50	23 070±50	14	24 240±±50	9,891	15,48	21,90	$51,71\cdot10^6$
Нептун . . .	19 500±200	$6,80\cdot10^6$	25 500±50	24 600±250	58,5	24 870±±250	10,987	16,53	23,38	$86,9\cdot10^6$
Плутон . . .	350 000±±50 000	$378\cdot10^3$	6200 (?)			6200 (?)	9,85 (?)	7,8 (?)	11,1 (?)	$36\cdot10^6$

Примечания: 1. Если не указана абсолютная погрешность, то последняя цифра приведенного числа является сомнительной.
2. Значение для g приводится таким, каким оно было бы, если бы небесное тело не вращалось вокруг своей оси.

ЛИТЕРАТУРА

Общие вопросы

0.1. Александров С. Г., Федоров Р. Е., Советские спутники и космические ракеты, изд. 2, Физматгиз, 1961.
0.2. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, ИЛ, 1964.
0.3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
0.4. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, Изд-во «Наука», Главная редакция физ.-матем. литературы, 1964.
0.5. Кинг-Хили Д. Г., Искусственные спутники и научные исследования, ИЛ, 1963.
0.6. Левантовский В. И., Ракетой к Луне, Физматгиз, 1959.
0.7. Левантовский В. И., Пути к Луне и планетам солнечной системы, Воениздат, 1965.
0.8. Рябов Ю. А., Движение небесных тел, изд. 2, Физматгиз, 1962.
0.9. Сейферт Г. (ред.), Космическая техника, перев. с англ., Изд-во «Наука», Главная редакция физ.-матем. литературы, 1964.
0.10. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, тт. I—III, Гостехиздат, 1937—1947.
0.11. Штерн Т., Введение в небесную механику, перев. с англ., Изд-во «Мир», 1964.
0.12. Штернфельд А. А., Искусственные спутники, изд. 2, Гостехиздат, 1958.
0.13. Эрике К., Космический полет, т. I, перев. с англ., Физматгиз, 1963.
0.14. Baker R., Makemson M., An Introduction to Astrodynamics, N. Y., 1960.
0.15. Jensen J., Townsend G., Kork J., Kraft D., Design Guide to Orbital Flight, N. Y., 1962.

Литература для справок по математике и астрономии

0.16. Выгодский М. Я., Справочник по высшей математике. Физматгиз, 1963.
0.17. Куликовский П. Г., Справочник любителя астрономии, Физматгиз, 1961.
0.18. Мышкис А. Д., Лекции по высшей математике, Физматгиз, 1964.

0.19. Сегал Б. И., Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1959.
0.20. Янпольский А. Р., Гиперболические функции, Физматгиз, 1960.

К ГЛАВЕ I

1.1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961, стр. 64—71.
1.2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли, Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», 1963, стр. 92—98.
1.3. Винти Дж. П., Новый метод определения орбит спутников в пустоте, Сб. переводов «Механика», № 6(70), 1961.
1.4. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
1.5. Кислик М. Д., Точное решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», 1963, стр. 76—91.
1.6. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.

К ГЛАВЕ II

2.1. Котельников В. А., Дубинский Б. А., Кислик М. Д., Цветков Д. М., Уточнение астрономической единицы по результатам радиолокации планеты Венеры в 1961 г., Сб. «Искусственные спутники Земли», № 17, 1963, стр. 101—106.
2.2. Погорелов Д. А., Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
2.3. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой—I, Инженерный журнал, т. III, № 3, 1963, стр. 590—615.
2.4. Цзу Т. С., Межпланетный полет с помощью солнечного паруса, Сб. переводов «Механика», № 1(65), 1961.
2.5. Лондон Г., Некоторые точные решения уравнений движения космического корабля с солнечным парусом, Сб. переводов «Механика», № 1(65), 1961.
См. также [0.1—0.12].

К ГЛАВЕ III

См. [0.1, 0.3, 0.9, 0.10, 0.12].

К ГЛАВЕ IV

4.1. Астапович И. С., Каплан С. А., Визуальные наблюдения искусственных спутников Земли, Гостехиздат, 1957.
4.2. Батраков Ю. В., Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно, «Бюллетень Ин-та теоретич. астрономии», т. 7, № 7, 1960.

4.3. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
4.4. Котельников В. А. и др., Использование эффекта Допплера для определения параметров орбиты искусственных спутников, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 1, 1958.
4.5. Таратынова Г. П., Методы численного решения уравнений в конечных разностях и их применение к расчетам орбит искусственных спутников Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960, стр. 56—81.
4.6. Щиголев Б. М., Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1962.
4.7. Эльясберг П. Е., Определение орбиты по двум положениям, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, 1962, стр. 3—22.
4.8. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казакова Р. К., Определение параметров орбиты искусственного спутника по данным наземных наблюдений, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4. 1960, стр. 43—55.

К ГЛАВЕ V

5.1. Алексеев В. М., Финальные движения в задаче трех тел. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, 1963, стр. 50—64.
5.2. Ситников К. А., Существование осциллирующих движений в задаче трех тел, Доклады АН СССР, т. 133, № 2, 1960, стр. 303—306.
5.3. Хильми Г. Ф., Проблема n тел в небесной механике и космогонии, Изд-во АН СССР, 1951.
5.4. Gröbner W., Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, Berlin, 1960.

К ГЛАВЕ VI

6.1. Егоров В. А., О некоторых задачах динамики полета к Луне, Успехи физических наук, т. 63, вып. 1а, 1957, стр. 73—118.
6.2. Кислик М. Д., Сферы влияния больших планет и Луны, Космические исследования, т. 2, № 6, 1964, стр. 853—858.
6.3. Левантовский В. И., Ракетой к Луне, Физматгиз, 1960.

К ГЛАВЕ VII

7.1. Егоров В. А., К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 3, 1960, стр. 3—12.
7.2. Лидов М. Л., Охоцимский Д. Е., Тесленко Н. М., Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел, Космические исследования, т. 2, № 6, 1964, стр. 843—852.
7.3. Седов Л. И., Орбиты космических ракет в сторону Луны, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 5, 1960, стр. 3—15.
7.4. Abhyankar K. D., Stability of straightline solutions in the restricted problem of three bodies, Astron. J., № 5, 1959, p. 64.
7.5. Kordylewski K., Photographische Untersuchungen des Librationspunktes L_5 in System Erde — Mond, «Acta Astron.» (Polska), т. 11, № 3, 1961, стр. 165—169.
См. также [6.1], [6.3].

К ГЛАВЕ VIII

8.1. Батраков Ю. В., Проскурин В. Ф., О возмущениях орбит искусственных спутников, вызываемых сопротивлением воздуха, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959.
8.2. Белецкий В. В., Орбита экваториального спутника Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, 1962.
8.3. Винти Дж. П., Новый метод определения орбит спутников в пустоте, Сб. переводов «Механика», № 6(70), 1961.
8.4. Егорова А. В., Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961, стр. 46—56.
8.5. Кислик М. Д., Точное решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел», Изд-во АН СССР, 1963, стр. 76—91.
8.6. Лахтин Л. М., Свободное движение в поле земного сфероида, Физматгиз, 1963.
8.7. Лидов М. Л., Определение плотности атмосферы по наблюдаемому торможению первых искусственных спутников Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 1, 1958.
8.8. Лидов М. Л., Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних сил, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961, стр. 5—45.
8.9. Лурье А. И., Уравнения возмущенного движения в задаче Кеплера, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960, стр. 82—85.
8.10. Охоцимский Д. Е., Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения, Космические исследования, т. 2, № 6, 1964, стр. 817—842.
8.11. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты, Успехи физических наук, т. 63, вып. 1а, 1957, стр. 33—50.
8.12. Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В., Возмущения первого порядка в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959, стр. 32—38.
8.13. Седов Л. И., Динамические эффекты в движении искусственных спутников Земли, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 2, 1958.
8.14. Таратынова Г. П., О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы, Успехи физических наук, т. 63, вып. 1а, 1957, стр. 51—58.
8.15. Эльясберг П. Е., Зависимость вековых изменений элементов орбит от сопротивления воздуха, Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959, стр. 54—60.
8.16. Эльясберг П. Е., Приближенные формулы для определения времени существования искусственного спутника Земли, Космические исследования, т. 2, № 2, 1964, стр. 198—218.

8.17. Яцунский И. М., О влиянии геофизических факторов на движение спутника, Успехи физических наук, т. 63, вып. 1а, 1957, стр. 59—72.
8.18. Brower D., Solution of the Problem of Artificial Satellite without Drag, Astron. J., vol. 64, № 9, 1959, pp. 378—396.
8.19. Fejer J. A., Life-time of an Artificial Earth Satellite, Nature, vol. 180, 1957, p. 1413.
8.20. King-Hele D. G., Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Near Satellite, Proc. Roy. Soc., ser. A, vol. 247, 1958, pp. 49—72.
8.21. King-Hele D. G., Descent of an Earth Satellite through Upper Atmosphere, Journal of the British Interplanetary Society, vol. 15, № 73, pp. 314—323.
8.22. Mills B. D., Satellite Paradox, Amer. Journal of Physics, vol. 27, № 2, 1959.
8.23. Scott J. M. C., Estimating the Life of a Satellite, Nature, vol. 180, 1957, p. 1467.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аномалия истинная 59
— средняя 110
— эксцентрическая 107
Апоцентр 58, 62
Апсиды орбиты 59
Аргумент перицентра 135
— широты 272
Астрономическая единица 85

Вектор Лапласа 54, 58, 95
Возмущения в элементах орбиты 264
Время жизни спутника 293
— звездное 144
— полета — см. *Продолжительность полета*
Встреча в космосе 16

Гармоники зональные 36
Гипербола 58, 71
Годограф скорости спутника 98, 99

Движение в сопротивляющейся среде 16
— возмущенное 269
— лагранжево трех тел 184
— обратное 49
— периодическое в ограниченной плоской круговой задаче трех тел 263
— прямое 49
— прямолинейное 65
— среднее 81
— трех тел гиперболическое 196
— — — гиперболо-эллиптическое 197
— — — ограниченное (эллиптическое) 196
Движение трех тел осциллирующее 197
— финальное в задаче трех тел 196
— *n* точек относительно барицентра 178 и д.
— — — — одной из них 187
Долгота восходящего узла 134

Задача двух тел 41 и д.
— — — ограниченная 42
— копенгагенская 263
— о двух фиксированных центрах 37
— трех тел 166 и д.
— — — ограниченная 229 и д.
— — — — плоская круговая 229 и д.
— — — — пространственная 258
— — — — — круговая 259
— *n* тел 13, 166 и д., 175 и д.
— — — ограниченная 14
Закон всемирного тяготения 11, 19 и д.
— Кеплера второй 50
— — —, форма для задачи *n* тел 182
— — первый 57
— — третий 82
— — — уточненный 84
Захват в задаче трех тел 197
— в ограниченной круговой задаче трех тел 260

Интеграл Лапласа 54
— — в комплексной форме 95

Интеграл площадей в задаче двух тел 47, 48, 92
— — — — трех тел 194
— — — — *n* тел 176
— сохранения кинетического момента 173
— энергии в задаче двух тел 52, 94
— — — — трех тел 174, 194
— — — — *n* тел 176
— Якоби 236
— — в инерциальной системе отсчета 240
Интегралы движения барицентра системы 172

Комплексная координата 91
Компонента скорости радиальная 61, 93
— — трансверсальная (поперечная) 61, 93
Константа Гаусса 84
— Лапласа комплексная 55, 94
— площадей векторная 47, 92
— — скалярная 48
— светового давления 88
— тяготения универсальная 84
— энергии 52, 94

Лагранжевы движения трех тел 184
Линия (ось) апсид 58
— узлов 133
— Хилла (линия нулевой относительной скорости) 252

Маневр космический 16
Метод неподвижной точки 114
Методика приближенная 209 и далее
Методы итерационные 113
Механика небесная классическая 11, 14
Момент инерции относительно оси 32
— кинетический системы точек 173

Область (сфера) действия 206
— притяжения 202
Обмен в задаче трех тел 197
Определение орбиты по положению и скорости спутника 149
— — по трем положениям спутника 145 и д.
Орбита гиперболическая 58, 79
— кеплерова 264
— круговая 67
— оскулирующая 266
— параболическая 58
— —, время полета 103
— периодическая в задаче трех тел 263
— прямолинейная 65
— эллиптическая 57
Осцилляция в задаче трех тел 197
— в ограниченной задаче трех тел 262
Ось апсид 58

Парабола 58
Парадокс спутника 287, 291
Параметр гравитационный 43
— — пары материальных точек 44
— — Солнца 85
— фокальный 56, 60
Парус солнечный 87, 98
Переменные комплексные в задаче двух тел 90 и д.
— — в плоской ограниченной задаче трех тел 238
Период обращения спутника 80, 83
Перицентр 58
Плотность 25
—, сферическое распределение 25
Поверхность Хилла (поверхность нулевой относительной скорости) 259
Поле потенциальное 21
— центральное ньютоновского тяготения 21
Полиномы Лежандра 35, 38
Полуось гиперболы вещественная 73
— главная эллипса или гиперболы 72
— эллипса большая 59
— — малая 60
Постоянная — см. *Константа*

Постоянная тяготения универсальная 11
Потенциал поля 21, 23
— — ньютоновского 22
— сжатого сфероида 34
— шара со сферическим распределением плотности 24 и д.
Правило рычага 62
Преобразование Ти́ле 242
Прецессия плоскости орбиты 159
Притяжение — см. *Потенциал*, *Тяготение*
Продолжительность жизни спутника 293
— перелета от перицентра 102 и д.
— — по орбите гиперболической 74, 122 и д.
— — — — параболической 104
— — — — эллиптической 104, 122 и д.
Прямое восхождение 143

Работа элементарная силового поля 22
Радиус средний небесного тела 68
— — притяжения 204
— сферы действия (радиус действия) 209
Радиус-вектор спутника 42
Расстояние среднее спутника от притягивающего центра 59
Ряды Зундмана 198
— Ли — Гребнера 199

Сила возмущающая 265
Система единиц каноническая 234
— координат географическая 144
— — горизонтальная 144
— — орбитальная 121
— — экваториальная геоцентрическая 143
— — — топоцентрическая 143
Склонение 143
Скорость 61
— в апоцентре 62
— в комплексной форме 96
— в перицентре 62
— гиперболическая 65
— космическая вторая 68
Скорость космическая первая 68
— — третья 213
— круговая 66, 69
— на бесконечности 53
— параболическая 65, 69
—, радиальная компонента 93
— секториальная 50
— — средняя системы трех точек 174
—, трансверсальная компонента 93
— угловая средняя спутника 81
— эллиптическая 65
Сопротивление атмосферы 285
Сплюснутость планеты 15, 278
Спутник 41
— близкий 15
— непритягивающий («малый») 42
— нулевой 68
— притягивающий 43, 83
— системы двух притягивающих центров 201
Среднее движение 81, 109
Срок жизни спутника 293
Сутки звездные 157
Сфера Аполлония 203
— влияния 210
— действия 206
— притяжения 202

Тело возмущающее 189
— центральное 41
Теорема о необратимости 259
— о симметрии 259
Точка материальная гравитирующая 11
— —, — активно 14
— —, — пассивно 14
— подспутниковая 156
Точки либрации 245
— — прямолинейные (коллинеарные) 248
— — треугольные 246
— равных притяжений коллинеарные 302
Траектория — см. также *Орбита*
— сближения 261
Трасса спутника Земли 156

Тяга малая 17
Тяготение 11, 12 и д.

Узел орбиты 133
— восходящий 134
— нисходящий 134
Уравнение Кеплера 109
— —, решение 111 и д.
— орбиты спутника 56, 96
Уравнения Ньютона — Лагранжа 266, 277
Ускорение возмущающее 205
— кориолисово 235, 239
— центробежное 239
Уточнение орбиты 151

Финальные движения в задаче трех тел 196

Формула Ламберта 123
— Ньютона — Эйлера 128
— Эйлера 70
Функция силовая 21, 23
— — системы n точек 175

Центр притягивающий («звезда») 41, 201, 237

Эксцентриситет 56
Элементы орбиты 133
— — оскулирующие 266
Эллипс 57, 71
Энергия спутника кинетическая 52
— — полная 52
— — потенциальная 23, 52

Марк Беневич Балк
Элементы динамики космического полета
(Серия: «Механика космического полета»)
М., 1965 г., 340 стр. с илл.
Редактор *П. Т. Резниковский*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 19/V 1965 г. Подписано к печати 9/XI 1965 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 10,63. Условн. печ. л. 17,42. Уч.-изд. л. 15,53. Тираж 4450 экз. Т-13758. Цена книги 98 коп. Заказ 2837.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.